

EXTRAPOLAÇÃO DO CAMPO DE ONDA ACÚSTICO UTILIZANDO
SOLUÇÕES INTEGRAIS DA EQUAÇÃO DA ONDA

Márcio de Araújo Martins

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. Luiz Landau, D.Sc.

Dr. Djalma Manoel Soares Filho, D.Sc.

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Dr. André Bulcão. D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2008

MARTINS, MÁRCIO DE ARAÚJO

Extrapolação do Campo de Onda Acústico
Utilizando Soluções Integrais da Equação da
Onda. [Rio de Janeiro] 2008.

VIII, 88p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 2008)

Dissertação – Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1. Teorema da Reciprocidade
2. Integrais de Kirchhoff-Helmholtz
3. Extrapolação do campo de onda
4. Integrais de Rayleigh
5. Migração em profundidade
6. Função de Green

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

DEDICATÓRIA

“A meus pais por estarem orgulhosos de mim; à Paula por ser uma luz na minha vida e a todos que de alguma forma contribuíram para eu chegar até aqui”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo, por me abençoar todos os dias, por me dar forças para continuar meu caminho e por estar sempre presente na minha vida.

Um agradecimento mais que especial a minha mãe Maria Salete e ao meu pai Boanerge (in memoriam) por serem minhas referências e minhas motivações, por serem os responsáveis pela pessoa que sou hoje, por tornarem tudo possível e por serem as pessoas que mais amo.

Agradeço ao meu irmão Marcelo por sempre me incentivar a estudar.

Agradeço a minha futura esposa Paula Bins Barreto por acreditar em mim, por ser minha motivação, por me incentivar sempre, por ser uma pessoa especial e por estar presente na minha vida.

Agradeço aos meus sogros Getúlio (Gegê) (in memoriam) e Marta por me acolherem como um filho e por me ensinarem muitas coisas.

Agradeço aos meus afilhados Douglas e Felipe pela compreensão à minha ausência, nas nossas idas ao cinema, nos nossos jogos de videogame, etc.

Agradeço aos meus amigos Fábio Reis de Oliveira, Marcos Meirelles dos Reis e Carlos Eduardo de Oliveira Lima pela compreensão à minha ausência.

Agradeço aos meus orientadores Professor Dr. Luiz Landau e Dr Djalma Manoel Soares Filho por tornarem esse trabalho possível.

Agradeço ao amigo geofísico Josias José da Silva pelas discussões, por me ensinar muitas coisas e pelo trabalho que ele realiza no LAB2M.

Agradeço aos amigos geofísicos Mitchel Xavier e Kátia Souza pelo companheirismo.

Agradeço ao Professor Dr. Webe João Mansur pelas discussões e incentivo à realização desse trabalho.

Agradeço a todo o pessoal do LAB2M e LAMCE pelo excelente ambiente de trabalho.

Agradeço a PETROBRAS pelo apoio financeiro.

Resumo de Dissertação apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

EXTRAPOLAÇÃO DO CAMPO DE ONDA ACÚSTICO UTILIZANDO SOLUÇÕES INTEGRAIS DA EQUAÇÃO DA ONDA

Márcio de Araújo Martins

Abril/2008

Orientadores: Luiz Landau

Djalma Manoel Soares Filho

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo analisar a extrapolação do campo de onda acústico, registrado em um levantamento sísmico, baseando-se na solução integral da equação da onda. Tanto a etapa de modelagem como de migração de dados sísmicos depende da extrapolação do campo, sendo este assunto fundamental para o imageamento em subsuperfície. As integrais de extrapolação do campo de onda são obtidas a partir das Integrais de Kirchhoff-Helmholtz, a partir dessas integrais foram feitas análises das considerações necessárias à aplicação das mesmas ao caso sísmico. A extrapolação do campo divide-se em direta e inversa, na extrapolação direta simulam-se os efeitos de propagação do campo de onda no meio considerado (modelagem), na extrapolação inversa elimina-se tais efeitos (migração).

Para se utilizar as integrais de extrapolação do campo, precisa-se da função de Green do meio de propagação, a qual é obtida a partir de um modelo de velocidades. A disponibilidade de um bom modelo de velocidades é fundamental para a obtenção de uma boa função de Green e conseqüentemente para a qualidade do campo de onda extrapolado, tanto direta como inversamente. Para a etapa de migração em profundidade dos dados sísmicos, precisa-se da extrapolação do campo de onda e de uma condição de imagem. Para se aplicar esse método de extrapolação a dados sísmicos, é adequada uma formulação matricial das equações, em virtude dos dados serem discretos, assim, operadores matriciais de extrapolação tanto direta como inversa foram obtidos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ACUSTIC WAVE FIELD EXTRAPOLATION USING INTEGRAL SOLUTIONS OF
WAVE-EQUATION

Márcio de Araújo Martins

April/2008

Advisors: Luiz Landau

Djalma Manoel Soares Filho

Department: Civil Engineering

This study aims to examine the extrapolation of the acoustic wave field, recorded in a seismic survey, based on the integral solution of the wave equation. Both the modeling stage as the migration of seismic data depends on the extrapolation of the field, being this issue fundamental to the subsurface imaging. The integrals of extrapolation of the wave field are obtained from Kirchhoff-Helmholtz's integral, from these were analyzed the necessary considerations for the implementation it in seismic event. The extrapolation of the field is divided into forward and backward, in forward extrapolation is simulated the propagation effects of the wave field in the considered middle (modeling), the backward extrapolation itself eliminates such effects (migration).

To use these integrals to extrapolate wave field, is needed the Green's function of the propagation medium, which is obtained from a velocity model. The availability of a good velocity model is essential to achieving a good Green's function and consequently for the quality of the extrapolated field, both forward and backward. For the stage of depth migration is needed the wave field extrapolation and an image condition. To apply this extrapolation method to seismic data, is needed a matrix formulation of equations, because the data are discrete, thus, matrix extrapolation operators of both forward and backward were obtained.

Índice

Página de Assinaturas	i
Ficha Catalográfica	ii
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Índice	vii
Introdução	1
1 Extrapolação Direta do Campo de Onda Acústico.....	7
1.1 Teorema da Reciprocidade Acústico	8
1.2 Teorema da Representação Acústico.....	14
1.2.1 Função de Green Acústica.....	15
1.2.2 Integral de Kirchhoff-Helmholtz.....	20
1.3 Integrais de Rayleigh.....	26
1.3.1 Integrais de Rayleigh Bidirecionais.....	26
1.3.2 Integrais de Rayleigh Unidirecionais.....	30
1.4 Operadores Para Extrapolação Direta do Campo de Onda Acústico.....	34
1.4.1 Formulação Integral.....	35
1.4.2 Formulação Matricial.....	38
2 Extrapolação Inversa do campo de Onda Acústico.....	43
2.1 Integral de Kirchhoff-Helmholtz para Extrapolação Inversa do Campo de Onda.....	44
2.2 Extrapolação Inversa do Campo de Onda Acústico para Meios Heterogêneos.....	51

2.2.1	Interface de Aquisição Curva.....	51
2.2.2	Interface de Aquisição Plano-Horizontal (Integrais de Rayleigh).....	56
2.3	Operadores para Extrapolação Inversa.....	60
3	Migração Sísmica em Profundidade.....	66
3.1	Esquema de Migração Sísmica em Profundidade.....	68
3.1.1	Extrapolação Direta do Campo de Onda no Domínio do Tempo.....	70
3.1.2	Extrapolação Inversa do Campo de Onda no Domínio do Tempo.....	71
3.1.3	Condição de Imagem.....	72
4	Conclusões, Comentários e Trabalhos Futuros.....	76
	Referências.....	80
	Apêndice A.....	83
	Apêndice B.....	86

INTRODUÇÃO

O objetivo de um levantamento sísmico é a obtenção de informações sobre a conformação das camadas geológicas em subsuperfície, assim como de suas propriedades físicas. Todo o processo de imageamento tem como base a propagação de ondas sísmicas através das camadas geológicas em subsuperfície, essas ondas refletem nas camadas e carregam consigo informações das mesmas, posteriormente estas ondas são registradas nos receptores. Um conjunto desses registros é denominado sismograma. O sismograma contém muitas informações relevantes, como o tempo decorrido desde a detonação da fonte até o registro das reflexões primárias, uma relação de amplitude do sinal registrado, dentre outras, entretanto, também contém ruídos que não são características das camadas geológicas, os quais são indesejados no registro. O grande objetivo dos profissionais que trabalham com imageamento sísmico é a partir do sismograma construir uma imagem, o mais fiel possível, das camadas em subsuperfície.

Todo o processo de imageamento divide-se em aquisição dos dados sísmicos, processamento e interpretação. A etapa de migração dos dados está dentro do processamento e consiste no correto posicionamento dos refletores em subsuperfície, a partir do sismograma, seja esse posicionamento em profundidade ou em tempo. Para a realização da migração em profundidade necessita-se de duas extrapolações do campo de onda, direta e inversa, mais uma condição de imagem. Dentre os métodos de extrapolação do campo de onda estão os que se baseiam na solução da equação da onda podendo essa ser uma solução diferencial ou uma solução integral. O método de extrapolação utilizando soluções diferenciais baseia-se na série de Taylor, já o método utilizando soluções integrais, que é

o foco desse trabalho, baseia-se no Princípio da Reciprocidade de Rayleigh e na função de Green do problema. Entretanto, a aplicação de tal teoria ao caso sísmico requer uma compreensão das técnicas de extrapolação, assim como de uma série de considerações e aproximações que serão discutidas ao longo dos capítulos. Faz-se necessário uma boa compreensão das considerações e aproximações feitas, a fim de avaliar a aplicabilidade e limitações do método.

A extrapolação do campo de onda divide-se em direta e inversa. Entende-se por extrapolação direta a determinação do campo de onda, em determinado ponto, em um instante posterior ao instante de geração do campo de onda e por extrapolação inversa a determinação do campo de onda, em determinado ponto, em um instante anterior ao instante de registro do campo, Figura (1). Através da extrapolação direta simulam-se os efeitos de propagação desde o instante da geração do pulso sísmico até o instante em que o campo chega ao ponto para onde se deseja determiná-lo e através da extrapolação inversa elimina-se os efeitos de propagação desde o instante de registro até o instante, em determinado ponto, onde o campo estava anterior ao mesmo. A extrapolação do campo de onda é ferramenta fundamental no processo de migração, justificando uma atenção especial.

As equações integrais para a extrapolação do campo de onda são obtidas a partir do Teorema da Reciprocidade de Rayleigh e das propriedades da função de Green e são conhecidas por Integrais de Kirchhoff-Helmholtz. Essas integrais atestam que pode-se calcular o campo de onda acústico, em um ponto interior a um volume V , onde se propaga o campo de onda, em função de uma integral de superfície fechada mais uma integral de volume. Nesse trabalho busca-se a compreensão de toda a teoria, assim como

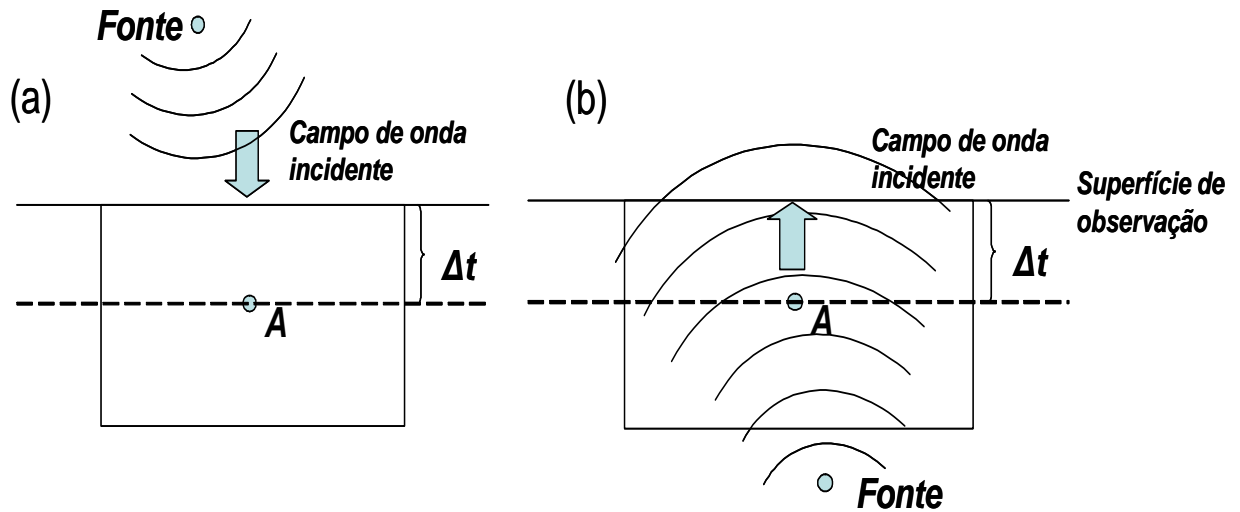


Figura 1: Representação da extrapolação direta e inversa para o ponto A. Na figura (a) o instante de chegada do campo de onda no ponto A é posterior ao instante de registro, caracterizando a extrapolação direta do campo. Na figura (b) o instante de chegada do campo de onda no ponto A é anterior ao instante de registro, caracterizando a extrapolação inversa do campo.

a obtenção de expressões que permitam extrapolar o campo, com boa aproximação, em função de uma observação discreta em uma superfície aberta e limitada (caso sísmico). As expressões aplicáveis ao caso sísmico são obtidas a partir das integrais de Kirchhoff-Helmholtz utilizando-se argumentos matemáticos e geométricos. Tanto as expressões para extrapolação direta do campo de onda como inversa dependem da função de Green do problema (para a extrapolação direta necessita-se da função de Green definidas com condições iniciais e para a extrapolação inversa a função de Green definida com condições finais), ou seja, da resposta impulsiva do meio de propagação. Para meios relativamente complexos não se tem expressões analíticas para a função de Green e a saída é a obtenção de uma aproximação, através de métodos numéricos. Para a obtenção de uma aproximação da função de Green, simula-se computacionalmente uma fonte impulsiva no ponto A, para

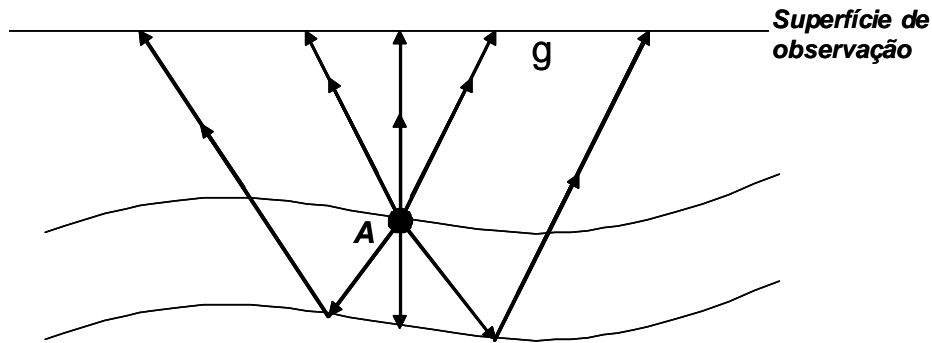


Figura 2: Obtenção computacional da resposta impulsiva do meio, ou seja, da função de Green.

onde se deseja extrapolar o campo, interior ao volume V e registra-se a resposta dessa fonte na superfície de aquisição, conforme sugere a Figura (2). A obtenção dessa aproximação para a função de Green depende do método utilizado para tal, assim como da disponibilidade do modelo de velocidades.

As integrais de Kirchhoff-Helmholtz são as bases para a dedução das integrais de Rayleigh, a partir das quais pode-se realizar a extrapolação do campo de onda acústico, de uma superfície de aquisição plana para um ponto interior ao meio de propagação. As integrais de Rayleigh podem ser bidirecionais ou unidirecionais, sendo as unidirecionais mais estáveis com relação a pequenas variações no meio de propagação, em função do campo de onda de Green não apresentar reflexões múltiplas associadas a superfície. Operadores de extrapolação direta e inversa são obtidos dessas equações. Em função dos dados sísmicos serem obtidos de forma discreta, uma abordagem matricial das mesmas é adequada, obtendo-se como resultado equações matriciais capazes de extrapolar o campo de onda, tanto direta como inversamente, de uma superfície de aquisição para um ponto interior ao meio de propagação.

Na etapa de migração em profundidade é necessário realizar a extrapolação direta do campo de onda a partir da fonte, a extrapolação inversa do campo de onda a partir do sismograma e imposição de uma condição de imagem, Figura (3). Os dados de entrada para a migração em profundidade são o sismograma e um macromodelo de velocidades. A partir do macromodelo de velocidades determina-se a função de Green do meio, a qual será utilizada tanto para a extrapolação direta como inversa. De posse da função de Green, através da modelagem, simulam-se os efeitos de propagação para uma fonte na superfície (através da Integral de Kirchhoff-Helmholtz para extrapolação direta), eliminam-se os efeitos de propagação a partir do sismograma (através da Integral de Kirchhoff-Helmholtz para extrapolação inversa) e aplica-se a condição de imagem. Feito isso para todos os pontos do modelo, tem-se a seção migrada em profundidade para uma fonte na superfície.

Neste trabalho foi deduzido o Teorema da Reciprocidade de Rayleigh, a partir do qual se obtém as integrais de Kirchhoff-Helmholtz que permitem realizar a extrapolação, tanto direta como inversa, do campo de onda acústico registrado em uma superfície de observação. No primeiro capítulo será analisada a aplicação da integral de Kirchhoff-Helmholtz ao caso sísmico (para levantamentos sísmicos realizados na superfície da terra), para a extrapolação direta do campo de onda. Utilizando argumentos matemáticos e geométricos chega-se às integrais de Rayleigh unidirecionais para extrapolação direta, a partir das quais pode-se definir operadores de extrapolação direta do campo de onda acústico. Posteriormente, em função dos dados de uma aquisição sísmica serem discretos, toda uma abordagem matricial das equações será apresentada, obtendo-se operadores matriciais de extrapolação direta do campo de onda.

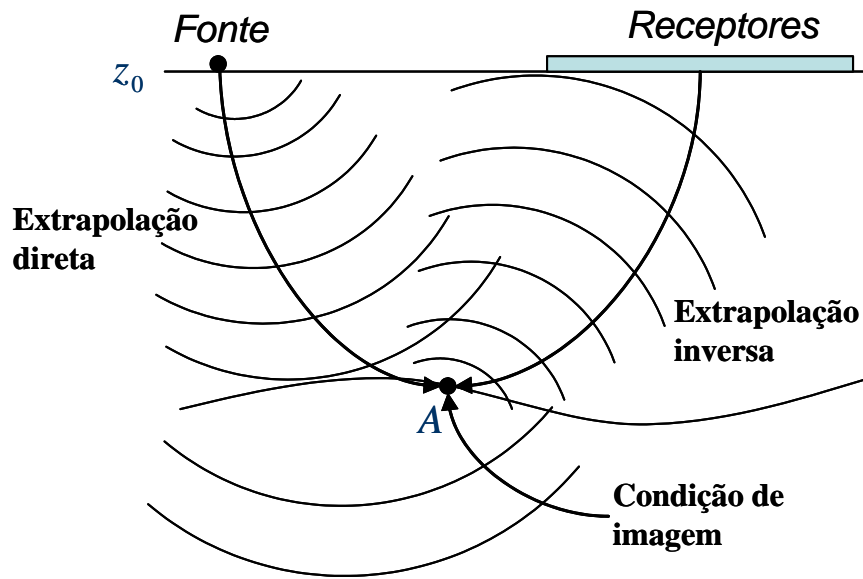


Figura 3: Representação da migração em profundidade dos dados sísmicos, onde se tem a extrapolação direta do campo de onda, a extrapolação inversa e uma condição de imagem.

No segundo capítulo será analisada a aplicação de toda a teoria para a extrapolação inversa do campo de onda, assim como suas aproximações. De forma análoga ao primeiro capítulo, a partir das integrais de Rayleigh para a extrapolação inversa definem-se operadores de extrapolação que também são representados matricialmente. O objetivo de toda essa análise de extrapolação de campo de onda é chegar a um esquema de migração em profundidade dos dados sísmicos, o qual será apresentado no terceiro capítulo.

Capítulo 1

Extrapolação Direta do Campo de Onda

O imageamento sísmico tem como base a propagação de ondas em subsuperfície, ou seja, todo processo se baseia na equação da onda e suas soluções. A partir de uma fonte, gera-se um pulso sísmico que se propaga no meio considerado, obedecendo as leis de reflexão e refração. A partir dos valores do campo de ondas registrado em uma superfície de observação, precisa-se determinar o valor do campo em outros pontos ou superfícies do interior do meio de propagação. Essa determinação pode ser para um tempo posterior ao de registro ou anterior ao instante de registro. Esse processo chama-se extrapolção do campo de onda.

Dentre os métodos de extrapolção do campo de onda estão os que utilizam soluções diferenciais ou integrais da equação da onda. As soluções diferenciais são obtidas através da série de Taylor, já as soluções integrais são obtidas empregando métodos baseados na função de Green. Essas soluções integrais são conhecidas como integrais de

Kirchhoff-Helmholtz. Verificar-se-á, ao longo do trabalho, que as condições de contorno impostas para a função de Green tem papel fundamental na adequação da solução obtida no problema teórico ao caso sísmico.

A solução integral da equação da onda, para pontos interior ao meio de propagação, é obtida a partir do teorema da reciprocidade de Rayleigh e consiste da soma de uma integral de volume (referido por termo de fonte) e uma integral de superfície (referido por termo de fronteira). Nesse trabalho se analisará as consequências da aplicação dessa solução ao caso sísmico. As integrais de Kirchhoff-Helmholtz são a base para as técnicas de extrapolação direta e inversa do campo de ondas, assim como, para a dedução das Integrais de Rayleigh que expressam a pressão em cada ponto do meio em termos do valor da pressão numa superfície plana (WAPENAAR E BERKHOUT,1989 [3]). No caso de um levantamento geofísico os dados obtidos na superfície de observação são discretos, possibilitando assim escrever equações e operadores matriciais para a extrapolação do campo de onda. Essas expressões matriciais são fundamentais para o desenvolvimento de um algoritmo de extrapolação do campo de onda.

1.1 Teorema da Reciprocidade Acústico

Considere dois campos de onda independentes se propagando em um mesmo volume V , envolvido por uma superfície fechada S com vetor normal unitário \vec{n} apontando para fora. A Figura (1.1) representa tal volume.

Nesse volume, são definidos dois campos de onda acústicos distintos e independentes, campos de onda A e B . Cada qual com as seguintes características:

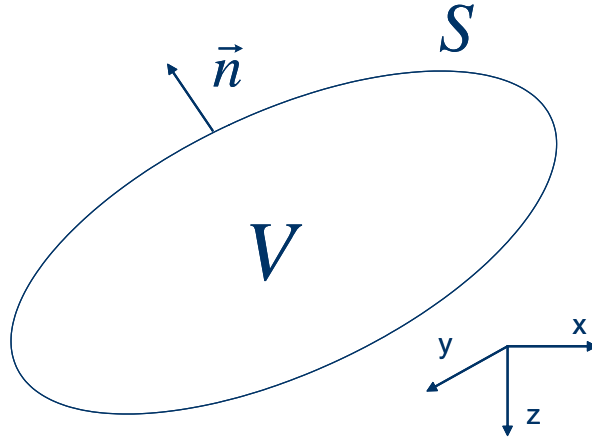


Figura 1.1: Volume V envolvido por uma superfície S com vetor normal n , em cada ponto, apontando para fora.

CAMPO A.

$K^A(\vec{r})$: Módulo de compressão adiabático,

$\rho^A(\vec{r})$: “Densidade volumétrica de massa”,

$p^A(\vec{r}, t)$: Pressão,

$i_V^A(\vec{r}, t)$: “Densidade volumétrica de injeção de volume”,

$\vec{f}^A(\vec{r}, t)$: “Densidade volumétrica de forças externas”.

O campo de onda A satisfaz a seguinte equação acústica da onda bidirecional

(WAPENAAR E BERKHOUT, 1989 [3]):

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \nabla p^A \right) - \frac{1}{K^A} \frac{\partial^2 p^A}{\partial t^2} = -s^A, \quad (1.1)$$

onde a distribuição de fontes é dada por

$$s^A = \frac{\partial^2 i_V^A}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{f}^A \right). \quad (1.2)$$

CAMPO B.

$K^B(\vec{r})$: Módulo de compressão adiabático,

$\rho^B(\vec{r})$: “Densidade volumétrica de massa”,

$p^B(\vec{r}, t)$: Pressão,

$i_V^B(\vec{r}, t)$: “Densidade volumétrica de injeção de volume”,

$\vec{f}^B(\vec{r}, t)$: “Densidade volumétrica de forças externas”.

O campo de onda B satisfaz a seguinte equação acústica da onda bidirecional

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \nabla p^B \right) - \frac{1}{K^B} \frac{\partial^2 p^B}{\partial t^2} = -s^B, \quad (1.3)$$

onde a distribuição de fontes é dada por:

$$s^B = \frac{\partial^2 i_V^B}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{f}^B \right). \quad (1.4)$$

Os campos de onda $p^A(\vec{r}, t)$ e $p^B(\vec{r}, t)$ estão no domínio espaço-tempo. Passando os campos e as fontes para o domínio espaço-frequência através da transformada de Fourier

$$H(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y, z, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.5)$$

obtêm-se as seguintes equações para os campos A e B respectivamente:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) + \frac{\omega^2}{K^A} P^A = -S^A, \quad (1.6)$$

onde $P^A(\vec{r}, \omega)$ e $S^A(\vec{r}, \omega)$ representam a pressão acústica e a distribuição de fontes no domínio espaço-frequência, respectivamente para o estado A, e

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) + \frac{\omega^2}{K^B} P^B = -S^B, \quad (1.7)$$

onde $P^B(\vec{r}, \omega)$ e $S^B(\vec{r}, \omega)$ representam a pressão acústica e a distribuição de fontes no domínio espaço-frequência, respectivamente para o estado B.

Com o objetivo de se encontrar uma relação de reciprocidade entre os campos de onda $P^A(\vec{r}, \omega)$ e $P^B(\vec{r}, \omega)$, se multiplicará a equação (1.7) por $P^A(\vec{r}, \omega)$, a equação (1.6) por $P^B(\vec{r}, \omega)$ e se subtrairá uma da outra, ou seja:

$$P^A \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) + \left(\frac{\omega^2}{K^B} P^A P^B - \frac{\omega^2}{K^A} P^A P^B \right) = S^A P^B - S^B P^A. \quad (1.8)$$

Invertendo a terceira parcela da equação (1.8), passando-a para o outro lado da igualdade e integrando por todo o volume V, obtém-se:

$$\int_V \left[P^A \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) \right] dV = \int_V \left[S^A P^B - S^B P^A + \omega^2 \left(\frac{1}{K^A} - \frac{1}{K^B} \right) P^A P^B \right] dV. \quad (1.9)$$

Somando ao integrando de cada lado o termo:

$$\left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A}\right) (\vec{\nabla} P^A) \cdot (\vec{\nabla} P^B), \quad (1.10)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \int_V \left[P^A \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) + \left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A} \right) (\vec{\nabla} P^A) \cdot (\vec{\nabla} P^B) \right] dV = \\ \int_V \left[S^A P^B - S^B P^A + \omega^2 \left(\frac{1}{K^A} - \frac{1}{K^B} \right) P^A P^B + \left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A} \right) (\vec{\nabla} P^A) \cdot (\vec{\nabla} P^B) \right] dV. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Seguindo a regra de divergente do produto¹ (MORSE E FESHBACH, 1953

[8]), percebe-se que o integrando do termo à esquerda, da equação (1.11), é igual a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[P^A \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) \right] = \\ P^A \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) + \left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A} \right) (\vec{\nabla} P^A) \cdot (\vec{\nabla} P^B). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Pode-se então escrever a equação (1.11) como:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\nabla \cdot \left[P^A \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) \right] \right] dV = \\ \int_V \left[S^A P^B - S^B P^A + \omega^2 \left(\frac{1}{K^A} - \frac{1}{K^B} \right) P^A P^B + \left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A} \right) (\vec{\nabla} P^A) \cdot (\vec{\nabla} P^B) \right] dV. \end{aligned} \quad (1.13)$$

¹ $\nabla \bullet (a\mathbf{F}) = a\nabla \bullet \mathbf{F} + \mathbf{F} \bullet \vec{\nabla} a$

Aplicando o Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{Q} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{Q} dV, \quad (1.14)$$

ao primeiro termo da equação (1.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \oint_S \left[P^A \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) \right] \cdot \vec{n} dS = \\ & \int_V \left[S^A P^B - S^B P^A + \omega^2 \left(\frac{1}{K^A} - \frac{1}{K^B} \right) P^A P^B + \left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A} \right) \left(\vec{\nabla} P^A \right) \cdot \left(\vec{\nabla} P^B \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (1.15)$$

A expressão (1.15) é conhecida como Teorema da reciprocidade de Rayleigh (RAYLEIGH,1965 [19]), e é a base para a obtenção dos operadores de extrapolação direta e inversa do campo de onda.

Ao se considerar os dois campos de onda A e B se propagando em meios idênticos, ou seja, se $K^A(\vec{r}) = K^B(\vec{r}) = K(\vec{r})$ e $\rho^A(\vec{r}) = \rho^B(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$, conjuntamente com a escolha de fontes do tipo monopolo para os campos A e B respectivamente nas posições \vec{r}_A e \vec{r}_B , tal que $S^A(\vec{r}, \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_A) S_0(\omega)$ e $S^B(\vec{r}, \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_B) S_0(\omega)$, onde $S_0(\omega)$ é a assinatura da fonte, pode-se simplificar a equação (1.15) para:

$$\oint_S \left[P^A \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P^A \right) \right] \cdot \vec{n} dS = [P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega)] S_0(\omega). \quad (1.16)$$

Na equação (1.16), $P^A(\vec{r}_B, \omega)$ representa o campo de onda A calculado na posição \vec{r}_B , associado a uma fonte do tipo monopolo $S_0(\omega)$ detonada na posição A. Analogamente, $P^B(\vec{r}_A, \omega)$ representa o campo de onda B calculado na posição \vec{r}_A , associado a uma fonte do tipo monopolo $S_0(\omega)$ detonada na posição B.

No caso de se considerar condições de contorno de Dirichlet², ou de Neumann³, ou se V é um volume ilimitado para os campos A e B sobre a superfície S (apêndice A), tem-se que:

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) = P^A(\vec{r}_B, \omega). \quad (1.17)$$

A expressão (1.17) é possivelmente a formulação mais conhecida do princípio da reciprocidade. Ela afirma que o valor campo de pressão no ponto A gerado por uma fonte do tipo monopolo localizada no ponto B é igual ao valor do campo de pressão no ponto B gerado por uma fonte do mesmo tipo, localizada no ponto A. Este princípio é válido para meios acústicos heterogêneos quaisquer.

1.2 Teorema da Representação Acústico

Com base no Teorema da Reciprocidade de Rayleigh, equação (1.15), e com uso de algumas ferramentas de cálculo, objetiva-se determinar uma expressão a partir da qual pode-se calcular o campo de onda $P(\vec{r}, \omega)$, em um ponto A interior ao volume V, de posse do valor do campo de onda ao longo da superfície fechada S.

²Condição de contorno de Dirichlet: $P(\vec{r}_S, t) = 0$, sobre S.

³Condição de contorno de Neumann $\vec{\nabla} P \cdot \vec{n} = 0$, sobre S.

Tal expressão é obtida a partir da equação (1.15), feitas as seguintes considerações:

a) Um dos campos de onda representa a função acústica de Green do problema e o outro o campo de onda físico que se propagam no volume V .

b) As propriedades físicas do volume V são as mesmas para os dois campos de onda.

c) O volume V é livre de fontes, ou seja, a fonte para o campo de onda físico se encontra fora de V .

Inicialmente se verá em detalhes as considerações necessárias para se chegar as equações de Kirchhoff-Helmholtz, que permitem calcular o campo de onda $P(\vec{r}_A, \omega)$, interior a V , em função de uma integral de superfície e uma integral de volume. Posteriormente se analisará as condições e consequências da aplicação dessas equações ao caso sísmico, no qual é necessária a adoção de algumas simplificações e aproximações.

1.2.1 Função de Green Acústica

Considerando-se a equação acústica da onda definida em um volume V .

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} p(\vec{r}, t) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -s, \quad (1.18)$$

onde $p(\vec{r}, t)$ representa o campo de onda em função das variáveis \vec{r} e t , no volume V . A variável \vec{r} é a notação compacta para as variáveis (x, y, z) .

Em adição a equação (1.18) é necessário ter condições de contorno e iniciais para se obter uma única solução dessa equação. A condição sobre a superfície S , que

delimita V , pode ser tanto de Dirichlet ou de Neumann, assim é necessário se ter $p(\vec{r}, t) = 0$ ou $\frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial n} = 0$, para todos os pontos sobre a superfície S . Uma maneira de se obter a solução da equação (1.18) é através da função de Green do problema.

A função de Green acústica é definida como sendo a resposta impulsiva de um meio (um fluido). Para uma força impulsiva aplicada no ponto A , a função de Green satisfaz a equação da onda bidirecional no domínio espaço-temporal, (MORSE E FESHBACH, 1953 [8]), ou seja:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \delta(t). \quad (1.19)$$

Com as condições iniciais:

$$g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = 0 \quad \text{para } t < 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}_A, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t < 0. \quad (1.21)$$

Por hora não se especificará as condições de contorno.

A função de Green da equação (1.18), uma função auxiliar em termos da qual pode-se expressar a solução da equação da onda e pelas condições de contorno definidas pelo problema. A função de Green $g(\vec{r}, \vec{r}_A, t)$ representa a resposta impulsiva do meio de propagação observada na posição \vec{r} , no instante t , referente a uma fonte impulsiva na posição \vec{r}_A no instante $t = 0$.

Com base na equação (1.17), pode-se escrever para a função de Green que:

$$g(\vec{r}_B, \vec{r}_A, t) = g(\vec{r}_A, \vec{r}_B, t). \quad (1.22)$$

As condições iniciais garantem que a função de Green assim definida é um campo de onda que se propaga (avança para o futuro) a partir da posição onde se encontra a fonte. Assim sendo, tal função é denominada Função de Green Causal. Oposto a isso, pode-se definir a Função de Green Anti-Causal ou Reversa no Tempo a partir da equação acústica da onda, definida com condições finais, ou seja:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \delta(t), \quad (1.23)$$

definida com condições finais

$$\hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = 0 \quad \text{para } t > 0, \quad (1.24a)$$

$$\frac{\partial \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t > 0. \quad (1.24b)$$

Assumindo que as funções de Green Causal e Anticausal satisfazem as mesmas condições de contorno, as mesmas estão simplesmente relacionadas através da expressão:

$$\hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = g(\vec{r}, \vec{r}_A, -t) \quad \text{para todos } \vec{r}, \vec{r}_A \text{ e } t. \quad (1.25)$$

De fato se $g(\vec{r}, \vec{r}_A, t)$ é uma solução da equação (1.19) com condições

iniciais, assim, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, -t) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, -t) = \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

e

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) = C \delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \delta(t). \quad (1.28)$$

A partir da equação (1.28), conclui-se que $g(\vec{r}, \vec{r}_A, -t)$ também é solução da mesma equação.

Define-se também, a partir da transformada de Fourier equação (1.5), o campo de onda de Green causal e anti-causal, no domínio espaço-frequência, respectivamente como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.29)$$

e

$$\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.30)$$

Considerando a equação (1.30) pode-se escrever que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1.31)$$

então

$$\int_0^{+\infty} \hat{g}(\vec{r}, \vec{r}_A, -\tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t} = \int_0^{+\infty} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t}, \quad (1.32)$$

então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}, \vec{r}_A, \tilde{t}) e^{i\omega \tilde{t}} d\tilde{t} = G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega). \quad (1.33)$$

Assim conclui-se que a função de Green anti-causal é igual ao complexo conjugado da função de Green causal, ou seja:

$$\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) = G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega), \quad (1.34)$$

portanto pode-se escrever que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g^*(\vec{r}, \vec{r}_A, t) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^*(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \delta(t), \quad (1.35)$$

definida com condições finais

$$g^*(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = 0 \quad \text{para } t > 0, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial g^*(\vec{r}, \vec{r}_A, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t > 0. \quad (1.37)$$

Em virtude das propriedades da Função de Green, é bastante conveniente considerar um dos campos de onda como sendo o campo de onda de Green $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ (ou o seu complexo conjugado) e o outro o campo de onda físico $P(\vec{r}, \omega)$ na equação (1.15), afim de se obter uma expressão que permita calcular o campo de onda $P(\vec{r}_A, \omega)$ em um ponto A interior ao volume V, em função do campo de onda acústico e sua derivada normal sobre a superfície S.

1.2.2 Integral de Kirchhoff-Helmholtz

Nesta seção o ponto de partida é o Teorema da Reciprocidade de Rayleigh, equação (1.15), com o objetivo de se obter uma expressão capaz de calcular $P(\vec{r}, \omega)$ em um ponto A interior a V. Para tal, considera-se inicialmente o campo de onda A como sendo o campo de onda de Green acústico, $P^A(\vec{r}, \omega) = G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$, definido pelas equações (1.19) e (1.29), que se propaga em um meio de referência e o campo de onda B como sendo o campo de onda físico $P^B(\vec{r}, \omega) = P(\vec{r}, \omega)$ que se propaga no meio real. Com essas considerações pode-se escrever as seguintes identidades.

Para o campo A:

$$K^A(\vec{r}) = \bar{K}(\vec{r}), \quad (1.38)$$

$$\rho^A(\vec{r}) = \bar{\rho}(\vec{r}), \quad (1.39)$$

$$S^A(\vec{r}, \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \quad \text{com } \vec{r}_A \in V, \quad (1.40)$$

$$P^A(\vec{r}, \omega) = G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) \text{ ou } G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega). \quad (1.41)$$

Para o campo B:

$$K^B(\vec{r}) = K(\vec{r}) = \bar{K}(\vec{r}) + \Delta K(\vec{r}), \quad (1.42)$$

$$\rho^B(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = \bar{\rho}(\vec{r}) + \Delta\rho(\vec{r}), \quad (1.43)$$

$$S^B(\vec{r}, \omega) = S(\vec{r}, \omega), \quad (1.44)$$

$$P^B(\vec{r}, \omega) = P(\vec{r}, \omega). \quad (1.45)$$

Onde $\Delta K(\vec{r})$ é a diferença entre o módulo de compressão adiabático do meio real e do meio de referência, e $\Delta\rho(\vec{r})$ é a diferença entre a densidade do meio real e do meio de referência. A fonte para o campo de onda de Green é uma função $\delta(\vec{r} - \vec{r}_A)$ aplicada em um ponto A interior a V , já a fonte para o campo de ondas físico é uma função $S(\vec{r}, \omega)$, aplicada em qualquer ponto. $P(\vec{r}, \omega)$ é o valor do campo de onda físico, no domínio da frequência, observado em uma posição \vec{r} e $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ (ou $G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$) é o valor do campo de onda de Green, no domínio da frequência, observado na posição \vec{r} para uma fonte na posição \vec{r}_A , pertencente a V . Considerando $P^A(\vec{r}, \omega) = G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ e substituindo as considerações feitas para os campos A e B na equação (1.15), repetida abaixo,

$$\oint_S \left[P^A \left(\frac{1}{\rho^B} \vec{\nabla} P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho^A} \vec{\nabla} P^A \right) \right] \cdot \vec{n} dS =$$

$$\int_V \left[S^A P^B - S^B P^A + \omega^2 \left(\frac{1}{K^A} - \frac{1}{K^B} \right) P^A P^B + \left(\frac{1}{\rho^B} - \frac{1}{\rho^A} \right) \left(\vec{\nabla} P^A \right) \cdot \left(\vec{\nabla} P^B \right) \right] dV,$$

tem-se:

$$\oint_S \left[G \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} G \right) \right] \cdot \vec{n} dS = \int_V \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}_A) P - SG + \omega^2 \left(\frac{1}{\bar{K}} - \frac{1}{K} \right) GP + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right) (\vec{\nabla} G) \cdot (\vec{\nabla} P) \right] dV. \quad (1.46)$$

Aplicando a propriedade de filtragem⁴ da função delta (BUTKOV,1988 [20]), para o primeiro termo da integral de volume, tem-se:

$$\oint_S \left[G \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} G \right) \right] \cdot \vec{n} dS = P(\vec{r}_A, \omega) + \int_V \left[-SG + \omega^2 \left(\frac{1}{\bar{K}} - \frac{1}{K} \right) GP + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right) (\vec{\nabla} G) \cdot (\vec{\nabla} P) \right] dV. \quad (1.47)$$

Assim pode-se escrever o seguinte Teorema de Representação:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \oint_S \left[G \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} G \right) \right] \cdot \vec{n} dS + \int_V \left[SG - \omega^2 \left(\frac{\Delta K}{\bar{K}K} \right) GP + \left(\frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}\rho} \right) (\vec{\nabla} G) \cdot (\vec{\nabla} P) \right] dV. \quad (1.48)$$

Analogamente ao se considerar $P^A(\vec{r}, \omega) = G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ pode-se escrever

⁴ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$

que:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \oint_S \left[G^* \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} G^* \right) \right] \cdot \vec{n} dS \\ + \int_V \left[SG^* - \omega^2 \left(\frac{\Delta K}{\bar{K}K} \right) G^* P + \left(\frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}\rho} \right) \left(\vec{\nabla} G^* \right) \cdot \left(\vec{\nabla} P \right) \right] dV. \quad (1.49)$$

As equações (1.48) e (1.49) são conhecidas como Integrais de Kirchhoff-Helmholtz. A partir delas, pode-se realizar a extrapolação do campo de onda direta e inversa, respectivamente. O campo de ondas extrapolado $P(\vec{r}_A, \omega)$, obtido utilizando-se qualquer uma dessas expressões, é exato. Porém, a sua aplicação ao caso sísmico requer algumas considerações e aproximações que serão analisadas a seguir.

Em uma aquisição sísmica, o campo de onda é registrado ao longo de uma superfície (aberta), assim, ao se utilizar as equações (1.48) ou (1.49) para a extrapolação do campo de ondas, a partir desses dados, a integral de volume do lado direito das mesmas devem não influenciar no valor do campo extrapolado $P(\vec{r}_A, \omega)$, em função de não se ter dados ao longo de todo o volume. Considera-se para tanto que o campo de onda físico e o campo de onda de Green se propagam no mesmo meio, com isso tem-se $\Delta K = \Delta \rho = 0$. Considera-se também que o volume V é livre de fontes, ou seja, $S(\vec{r}, \omega) = 0$ no interior de V . Com isso pode-se desconsiderar o termos referente a integral de volume e as equações (1.48) e (1.49) tornam-se:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \oint_S \left[G \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} G \right) \right] \cdot \vec{n} dS \quad (1.50)$$

e

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \oint_S \left[G^* \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \right) - P \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} G^* \right) \right] \cdot \vec{n} dS. \quad (1.51)$$

Ambas as expressões (1.50) e (1.51), com o campo de onda de Green direto ou inverso, permitem calcular o campo $P(\vec{r}_A, \omega)$, em um ponto A interior ao volume V, a partir de uma integral de superfície fechada, tendo o campo de onda acústico e sua derivada normal sobre a superfície S. As Figura (1.2) e (1.3) representam tais situações respectivamente. Entretanto, em uma aquisição sísmica tem-se o campo de onda em uma superfície aberta, fazendo-se necessário a análise da aplicação de tais expressões a essa situação, ou seja, sob quais condições pode-se aproximar a superfície fechada para uma superfície aberta. Por hora, se analisará a equação (1.50), pois a mesma é a base para as técnicas de extrapolação direta do campo de onda. No próximo capítulo a atenção será direcionada para a equação (1.51), em função da mesma ser a base para as técnicas de extrapolação inversa do campo de onda.

A extrapolação direta do campo de onda a partir da equação (1.50) é utilizada para simular os efeitos de propagação em determinado meio. Segundo (WAPE-NAAE E BERKHOUT,1989 [3]) a extrapolação direta do campo de onda acústico é exata somente quando o meio de propagação da campo de onda físico e do campo de onda de Green são iguais. Já a extrapolação inversa do campo de onda, a partir da equação (1.51), é utilizada para eliminar os efeitos de propagação e para tal basta que se tenha um meio para o campo de onda físico semelhante ao meio para o campo de onda de Green,

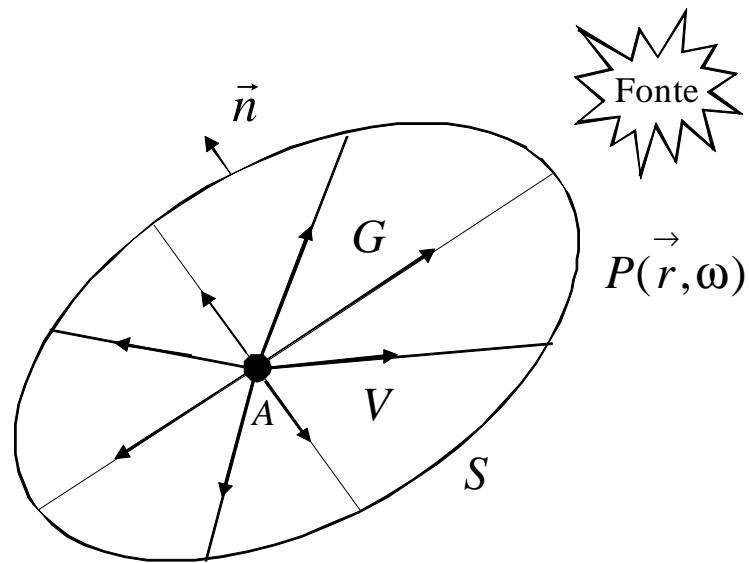


Figura 1.2: Representação do campo de onda acústico e do campo de onda de Green direto, sobre a superfície S . O campo de onda acústico $P(\vec{r}_A, \omega)$, em qualquer ponto A interior a S , pode ser calculado em função do campo e sua derivada normal ao longo de S .

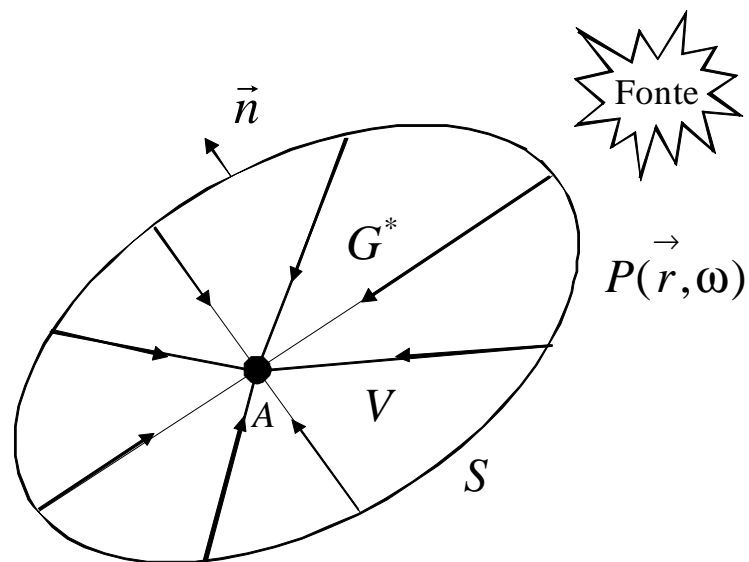


Figura 1.3: Representação do campo de onda acústico e do campo de onda de Green inverso, sobre a superfície S . O campo de onda acústico $P(\vec{r}_A, \omega)$, em qualquer ponto A interior a S , pode ser calculado em função do campo e sua derivada normal ao longo de S .

(um macromodelo de $K(\vec{r})$ e $\rho(\vec{r})$), (BERKHOUT 1982, [4]).

1.3 Integrais de Rayleigh

As integrais de Rayleigh para a extrapolação do campo de onda acústico são obtidas a partir das integrais de Kirchhoff-Helmholtz adotando condições de contorno adequadas para o campo de onda de Green e utilizando uma geometria que permita aproximar a superfície fechada S para uma superfície aberta. O objetivo de deduzí-las é extrapolar o campo de onda, com boa aproximação, considerando apenas uma parte das equações (1.50) e (1.51), assim como aplicá-las ao caso sísmico onde se tem uma superfície de aquisição aberta. Nesse capítulo se analisará a aplicação da equação (1.50) para a extrapolação direta do campo de onda acústico da superfície de aquisição para um ponto em subsuperfície e no próximo capítulo a extrapolação inversa do campo.

1.3.1 Integrais de Rayleigh bidirecionais

Partindo da integral de Kirchhoff-Helmholtz, equação (1.50), pode-se considerar, para o campo de onda de Green, condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet sobre a superfície S . Entretanto, ao se considerar essas condições de contorno, a superfície S representará um refletor perfeito para o campo de onda de Green, com coeficiente de reflexão $R=+1$ no caso de condições de Neumann (superfície rígida) e coeficiente de reflexão $R=-1$, no caso de condição de Dirichlet (superfície livre), (BERKHOUT E WAPENAAR 1989 parte I [1]). A associação de uma dessas condições de contorno com uma geometria adequada para a superfície S , permite extrapolar o campo de onda para dentro do volume

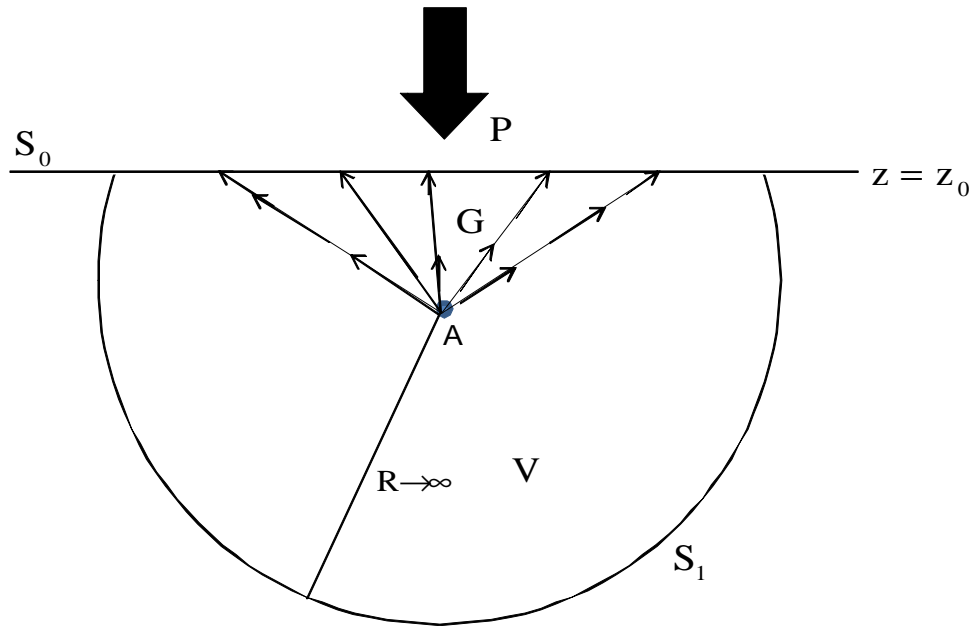


Figura 1.4: Geometria para a qual a superfície fechada S pode se substituída por uma superfície aberta.

V , de posse somente de uma parte da Integral de Kirchhoff-Helmholtz.

Considere a integral de Kirchhoff-Helmholtz para extrapolação direta do campo de ondas aplicada à geometria da Figura (1.4) para a superfície S . Na figura observa-se que a superfície S pode ser dividida em duas partes, uma parte plana e horizontal S_0 em $z = z_0$ e a outra parte uma casca esférica de raio R e superfície S_1 para $z > z_0$. O ponto A , onde estará a fonte do campo de onda de Green, está situado no centro da semi-esfera e a fonte do campo de onda físico está situada em um ponto qualquer em $z < z_0$, ou seja, fora de V . Ao se fazer o raio da semi-esfera tender a infinito, a contribuição da integral de Kirchhoff-Helmholtz, sobre a superfície S_1 , para o campo de

onda no ponto A, tende a zero⁵ (SOARES FILHO,2007 [5]), ou seja, o campo de onda $P(\vec{r}_A, \omega)$ pode ser calculado pela integral ao longo da superfície aberta S_0 (BERKHOUT E WAPENAAR 1989 Parte I [1]). Assim pode-se escrever que:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho(\vec{r})} \left[\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z} P(\vec{r}, \omega) - G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) \frac{\partial P(\vec{r}, \omega)}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy. \quad (1.52)$$

A equação (1.52) complementada pelas condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet, sobre a superfície S_0 , dão origem as integrais de Rayleigh. As condições de contorno de Neumann ou de Dirichlet, impostas sobre a superfície S_0 , indicam que a mesma se comporta como uma superfície rígida ou livre, respectivamente. Nos dois casos a superfície S_0 funciona como um refletor perfeito para a função de Green, assim pode-se interpretar a função de Green como sendo causada por dois monopolos situados simetricamente com respeito a superfície S_0 . Se esses dois monopolos tiverem a mesma polaridade, equivale a imposição da condição de contorno Neumann e a integral (1.52) se reduz a:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho(\vec{r})} G_I(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) \frac{\partial P(\vec{r}, \omega)}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy, \quad (1.53)$$

com

$$\frac{\partial G_I(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z} = 0 \quad \text{sobre } S_0. \quad (1.54)$$

Se os dois monopolos tiverem polaridades opostas, equivale a imposição da

⁵Condição de radiação de Sommerfeld.

condição de contorno de Dirichlet e a equação (1.52) se reduz a:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho(\vec{r})} \frac{\partial G_{II}(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z} P(\vec{r}, \omega) \right]_{z_0} dx dy, \quad (1.55)$$

com

$$G_{II}(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) = 0 \quad \text{sobre } S_0. \quad (1.56)$$

As equações (1.53) e (1.55) são conhecidas como fórmulas integrais de Rayleigh bidirecionais, através delas pode-se realizar a extapolação direta do campo de onda registrado na superfície S_0 para o ponto A, interior ao meio de propagação. Como mencionado em (WAPENAAR E BERKHOUT 1989, [3]), essas equações, aplicadas a meios heterogêneos, só apresentam bons resultados quando os mesmos são exatamente conhecidos, em função de, nesse caso, $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ ou $\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z}$ apresentarem muitas reflexões múltiplas associadas a superfície S_0 , as quais precisam ser exatamente conhecidas.

No caso da migração sísmica, onde se tem uma aproximação das propriedades físicas do meio (macromodelos), as condições de Neumann ou de Dirichlet causam muitas reflexões múltiplas associadas tanto a heterogeneidades como a superfície S_0 . Essas reflexões múltiplas podem tornar G ou $\frac{\partial G}{\partial n}$ muito complicadas, o que causa instabilidade com relação a pequenas diferenças entre os meios de propagação dos campos, fazendo com que a aplicação de tais condições de contorno para um meio não exatamente conhecido e uma superfície de aquisição irregular não seja adequada (WAPENAAR E BERKHOUT, 1989 [1]). Uma solução para esse problema é considerar para o campo de onda

físico e para o campo de onda de Green uma propagação unidirecional, que contempla somente as onda primárias.

1.3.2 Integrais de Rayleigh unidirecionais

Os campos de onda que se propagam em um determinado meio podem ser decompostos com relação as direções de propagação ascendente e descendente, assim, ao se analisar cada componente separadamente tem-se uma abordagem unidirecional do campo de onda. Uma característica da equação de Kirchhoff-Helmholtz é que ela possibilita escolher o meio de propagação do campo de onda de Green de maneira conveniente. Assim, dentro do volume V , utiliza-se o meio para o campo de onda de Green $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$, igual ao meio para o campo de onda físico $P(\vec{r}, \omega)$. Entretanto, fora do volume V o meio para $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ pode ser escolhido de qualquer maneira conveniente.

Escolhendo um meio de referência com um contorno altamente reflexivo, obtém-se uma função de Green contendo muitas reflexões múltiplas, as quais provocam um alto grau de instabilidade na reconstrução do campo de onda (WAPENAAR E BERKHOUT, 1989 [1]). Em alternativa a essa situação pode-se escolher, fora do volume V , um meio de referência não reflexivo para a função de Green. Em particular, para a geometria da Figura (1.4), significa escolher o semi-espço superior $z < z_0$, não reflexivo para a função de Green. Esse semi-espço superior não reflexivo pode ser obtido escolhendo as seguintes propriedades para o mesmo:

$$K(x, y, z < z_0) = K(x, y, z_0) \quad (1.57)$$

e

$$\rho(x, y, z < z_0) = \rho(x, y, z_0). \quad (1.58)$$

Com esta escolha não ocorrem ondas descendentes originadas no semi-espço superior, assim tem-se uma função de Green exclusivamente ascendente, na superfície $z = z_0$, $G^-(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$. Em termos de condições de contorno, pode-se dizer que a superfície $z = z_0$ é não reflexiva para $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$.

As forças que originam o campo de onda acústico $P(\vec{r}, \omega)$ atuam exclusivamente no semi-espço superior, de tal forma que na superfície $z = z_0$, este campo consiste de um campo incidente descendente $P^+(\vec{r}, \omega)$ (incluindo todos os termos de ordem superior, isto é, todas as reflexões múltiplas e difrações, originadas no semi-espço superior), e um campo espalhado ascendente $P^-(\vec{r}, \omega)$ (também incluindo todos os termos de ordem superior), ou seja:

$$P(\vec{r}, \omega) = P^+(\vec{r}, \omega) + P^-(\vec{r}, \omega) \quad \text{em } z = z_0. \quad (1.59)$$

Considerando a superfície S_0 como sendo não reflexiva e substituindo a equação 1.59 na integral de Kirchhoff-Helmholtz 1.52, obtém-se:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial G^-}{\partial z} (P^+ + P^-) - G^- \left(\frac{\partial P^+}{\partial z} + \frac{\partial P^-}{\partial z} \right) \right]_{z_0} dx dy \quad (1.60)$$

ou

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial G^-}{\partial z} P^+ - G^- \frac{\partial P^+}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial G^-}{\partial z} P^- - G^- \frac{\partial P^-}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy. \quad (1.61)$$

Somente a primeira integral da equação (1.61) contribui para o valor do campo de onda no ponto A, ou seja, somente a integral que envolve os campos de onda que se propagam em direções opostas, contribui para o valor do campo de onda em A (WAPENAAR E BERKHOUT,1989[3]). Assim obtém-se que:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial G^-}{\partial z} P^+ - G^- \frac{\partial P^+}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy. \quad (1.62)$$

Além disso os dois termos dentro da integral (1.62) têm igual contribuição para o campo de onda no ponto A, permitindo-nos escrever (BERKHOUT E WAPENAAR,1989[1]:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho(\vec{r})} G^-(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) \frac{\partial P^+(\vec{r}, \omega)}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy, \quad (1.63)$$

ou equivalentemente,

$$P(\vec{r}_A, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho(\vec{r})} \frac{\partial G^-(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z} P^+(\vec{r}, \omega) \right]_{z_0} dx dy. \quad (1.64)$$

As equações (1.63) e (1.64) são as versões unidirecionais das integrais de Rayleigh (1.53) e (1.55), respectivamente, e são válidas para meios acústicos arbitrariamente heterogêneos. A única suposição é que na superfície $z = z_0$ as ondas descendentes e ascendentes estão desacopladas. Esta suposição é válida quando as derivadas em relação a z dos parâmetros do meio se anulam em $z = z_0$ (WAPENAAR E BERKHOUT 1989, [3]), ou seja:

$$\frac{\partial K(x, y, z_0)}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z_0 \quad (1.65)$$

e

$$\frac{\partial \rho(x, y, z_0)}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z_0. \quad (1.66)$$

Para meios homogêneos onde a função de Green é puramente ascendente sobre a superfície S_0 e o campo de onda físico é puramente descendente, nota-se que as integrais de Rayleigh unidirecionais e bidirecionais são idênticas.

Entretanto, para meios arbitrariamente heterogêneos, as integrais de Rayleigh unidirecionais são muito diferentes das integrais de Rayleigh bidirecionais devido ao fato de as funções de Green unidirecionais não apresentarem reflexões múltiplas relacionadas à superfície S_0 . As integrais de Rayleigh unidirecionais são consideravelmente mais estáveis em relação aos erros no modelo de referência (WAPENAAR E BERKHOUT, 1989 [3]).

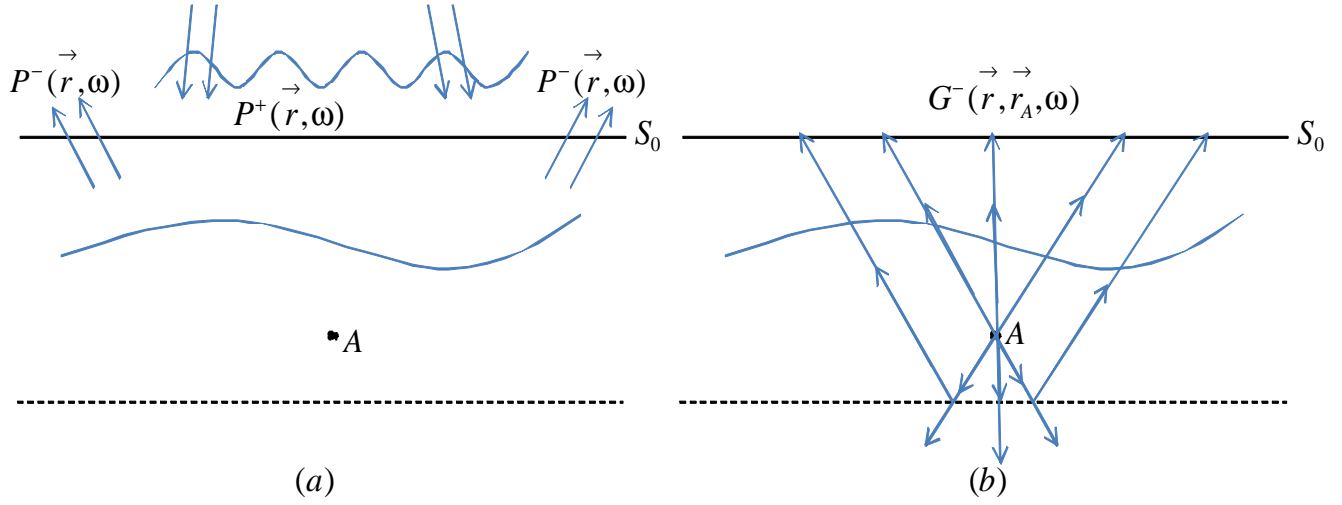


Figura 1.5: A integral de Rayleigh II unidirecional expressa o campo de onda total (isto é, bidirecional) em em termos do campo de onda descendente (isto é, unidirecional) em z_0 (a) e da função de Green ascendente (isto é, unidirecional) em z_0 (b).

1.4 Operadores para Extrapolação Direta do Campo de Onda Acústico

Nesta seção o objetivo é obter operadores de extrapolação direta do campo de onda, para meios arbitrariamente heterogêneos. A base para a dedução desses operadores é a integral de Rayleigh unidirecional (1.64). Nessa equação $P^+(\vec{r}, \omega)$ representa a parte descendente do campo de onda acústico total $P(\vec{r}, \omega)$ em $z = z_0$, relativo a uma fonte no semi-espaço superior $z < z_0$, Figura (1.5a), $G^-(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ representa o campo de onda de Green ascendente em $z = z_0$, Figura (1.5b), e $P(\vec{r}_A, \omega)$ representa o campo de onda total no ponto \vec{r}_A pertencente ao semi-espaço inferior $z > z_0$. A equação (1.64) descreve a extrapolação do campo de onda descendente $P^+(\vec{r}, \omega)$ em $z = z_0$, resultando no campo de onda total $P(\vec{r}_A, \omega)$ (bidirecional) no ponto \vec{r}_A .

1.4.1 Formulação Integral

Baseado no princípio da reciprocidade, equação (1.17), pode-se escrever que:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) = G(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega) \quad \text{em } z = z_0, \quad (1.67)$$

substituindo a identidade acima na equação (1.64) obtém-se:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho(\vec{r})} \frac{\partial G^-(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega)}{\partial z} P^+(\vec{r}, \omega) \right]_{z_0} dx dy. \quad (1.68)$$

A função $G^-(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega)$ representa o campo de onda de Green na posição \vec{r}_A , no semi-espaço inferior, relacionada a fontes do tipo monopolo em \vec{r} sobre a superfície z_0 . A função $\frac{\partial G^-(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega)}{\partial z}$ representa o campo de onda de Green na posição \vec{r}_A , no semi-espaço inferior, relacionada a uma distribuição de fontes dipolo em \vec{r} sobre a superfície z_0 . Assim, a equação (1.68) permite calcular o campo de onda total na posição \vec{r}_A , através de uma integral da resposta em \vec{r}_A referente a fontes do tipo dipolo distribuídas sobre a superfície z_0 , com pesos definidos pela densidade e pelo valor do campo de onda descendente $P^+(\vec{r}, \omega)$ em z_0 (WAPENAAR E BERKHOUT 1989, [3]).

A equação (1.68) pode ser escrita utilizando o conceito de operadores de extrapolação do campo de onda W^+ e W^- , (BERKHOUT 1982,[4])

$$P(x_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^+(x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z_0; \omega) P^+(x_0, y_0, z_0, \omega) dx_0 dy_0 \quad (1.69)$$

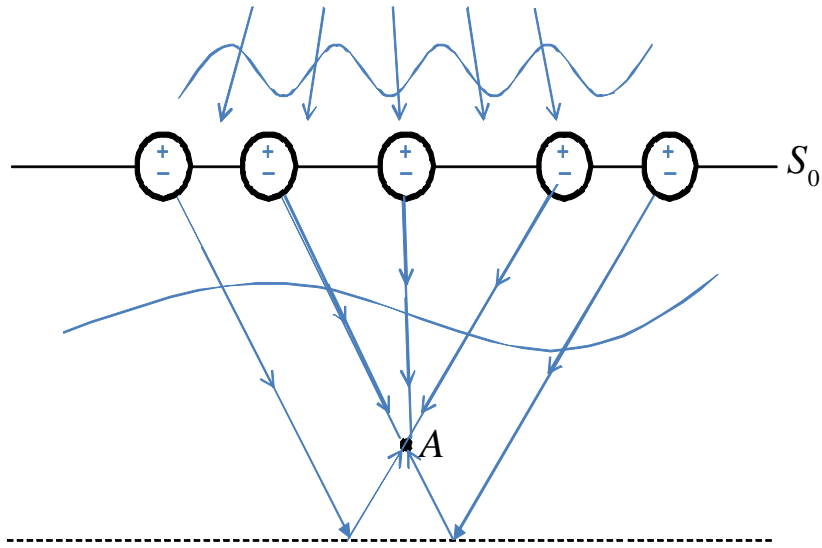


Figura 1.6: Fontes dipolo distribuídas sobre a superfície z_0

com

$$W^+(x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z; \omega) = \left[\frac{2}{\rho(x_0, y_0, z_0)} \frac{\partial G^-(x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z; \omega)}{\partial z} \right]_{z_0}, \quad (1.70)$$

analogamente, para extrapolação direta do campo de onda do plano formado por $z = z_1$ para o plano formado por $z = z_0$ tem-se:

$$P(x_0, y_0, z_0, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^-(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; \omega) P^+(x_1, y_1, z_1, \omega) dx_1 dy_1 \quad (1.71)$$

com

$$W^-(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z; \omega) = \left[\frac{2}{\rho(x_1, y_1, z_1)} \frac{\partial G^+(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z; \omega)}{\partial z} \right]_{z_1} \quad (1.72)$$

As equações (1.69) e (1.71) são as fórmulas integrais de extrapolação direta

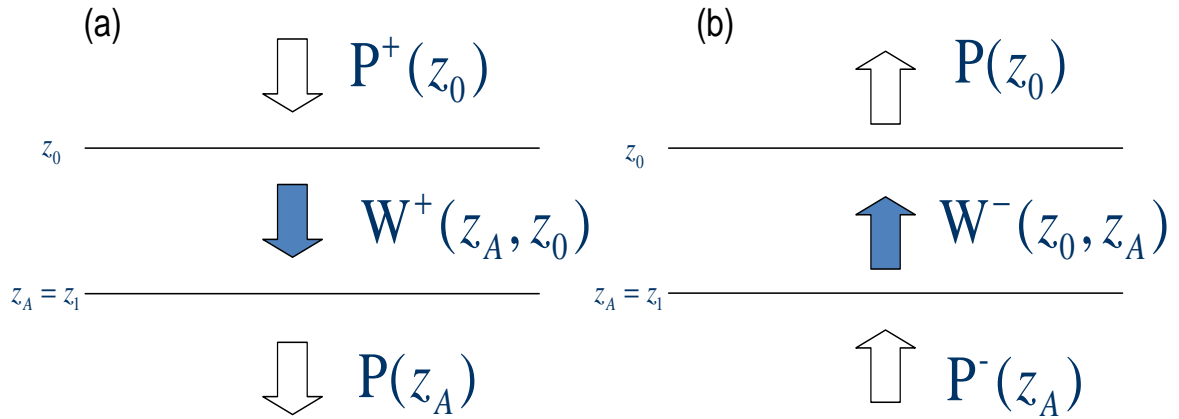


Figura 1.7: (a) Esquema representando extrapolação direta do campo de onda, utilizando o operador W^+ , da superfície de aquisição z_0 para a superfície z_1 . (b) Esquema representando extrapolação direta do campo de onda, utilizando o operador W^- , da superfície de aquisição z_1 para a superfície z_0 .

do campo de onda com os respectivos operadores de extrapolação $W^+(x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z; \omega)$ e $W^-(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z; \omega)$. Conforme mostra a Figura (1.7) $W^+(x_1, y_1, z_1; x_0, y_0, z; \omega)$ é o operador de extrapolação direta do campo de onda incidente na superfície S_0 para o ponto A sobre a superfície S_1 . Da mesma forma, $W^-(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z; \omega)$ é o operador de extrapolação direta do campo de onda incidente na superfície S_1 para o ponto A sobre a superfície S_0 .

Na aquisição de dados sísmicos, os dados registrados na superfície de aquisição são discretos, em função do espaçamento entre os receptores. Por causa disso, a aplicação das integrais de Kirchhoff-Helmholtz ou das integrais de Rayleigh ao caso sísmico requerem um tratamento discreto e uma formulação matemática adequada. Assim, interpretar os campos de onda, extrapolado e registrado, e os operadores de extrapolação, como matrizes, é bastante conveniente. Na próxima seção se analisará essa formulação matricial.

1.4.2 Formulação Matricial

Na prática de uma aquisição sísmica, os dados registrados na superfície são discretizados, em função disso pode-se escrever a equação (1.68) como um somatório. Vejamos como esse somatório pode ser interpretado e escrito como um produto de matrizes.

Tomando por base a equação (1.68), a qual é definida para um espectro de frequência ω_i , pode-se escrever a mesma de maneira discretizada para o caso bidimensional, como:

$$P(m\Delta x, z_1, \omega_i) \approx 2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[\frac{\partial G^-(m\Delta x, z_1; k\Delta x, z_0; \omega_i)}{\partial z} \frac{\Delta x}{\rho(k\Delta x, z_0)} P^+(k\Delta x, z_0, \omega_i) \right]_{z_1} \quad (1.73)$$

Onde $(m\Delta x, z_1)$ é a posição da fonte impulsiva para a função de Green, $(l\Delta x, z < z_0)$ é a posição de cada fonte do campo de onda físico e $(k\Delta x, z_0)$ é a posição de cada receptor. Como os campos de onda $P(k\Delta x, z_0, \omega_i)$ e os operadores $\frac{\partial G^-(m\Delta x, z_1; k\Delta x, z_0; \omega_i)}{\partial z}$ são discretos, pode-se expressá-los em forma matricial, sendo a matriz $\frac{\partial \mathbf{G}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)}{\partial z}$ de ordem $M \times K$, a matriz $\mathbf{P}^+(\mathbf{z}_0)$ de ordem $K \times L$ e a matriz dos dados extrapolados $\mathbf{P}(\mathbf{z}_1)$ de ordem $M \times L$.

$$\mathbf{P}^+(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} P_{1,1}^+ & \dots & P_{1,l}^+ & \dots & P_{1,L}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{k,1}^+ & \dots & P_{k,l}^+ & \dots & P_{k,L}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{K,1}^+ & \dots & P_{K,l}^+ & \dots & P_{K,L}^+ \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

e

$$\mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} W_{1,1}^+ & \dots & W_{1,k}^+ & \dots & W_{1,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{m,1}^+ & \dots & W_{m,k}^+ & \dots & W_{m,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{M,1}^+ & \dots & W_{M,k}^+ & \dots & W_{M,K}^+ \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

e

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}_1) = \begin{bmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,l} & \dots & P_{1,L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{m,1} & \dots & P_{m,l} & \dots & P_{m,L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{M,1} & \dots & P_{M,l} & \dots & P_{M,L} \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

onde os índices M , K e L referem-se, respectivamente, a:

$M \implies$ Número total de pontos onde se tem a fonte impulsiva para a função de Green,

$K \implies$ Número total de receptores,

$L \implies$ Número total de fontes sísmicas.

Assim, pode-se escrever a equação (1.73) como um produto de matrizes da seguinte forma:

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)\mathbf{P}^+(\mathbf{z}_0), \quad (1.77)$$

onde o operador unidirecional de extrapolação direta \mathbf{W}^+ é dado por:

$$\mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) = 2 \frac{\partial \mathbf{G}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)}{\partial z} \frac{1}{\rho(\mathbf{z}_0)} \quad (1.78)$$

Analogamente, para o campo ascendente, pode-se escrever que:

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) \mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1) \quad (1.79)$$

Onde a matriz de extrapolação ascendente unidirecional do campo de onda \mathbf{W}^- é dada por:

$$\mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) = 2 \frac{\partial \mathbf{G}^+(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)}{\partial z} \frac{1}{\rho(\mathbf{z}_1)} \quad (1.80)$$

As matrizes $\rho(\mathbf{z}_0)$ e $\rho(\mathbf{z}_1)$ são diagonais de ordem $K \times K$. Pode-se, então, escrever as equações (1.77) e (1.79) como o produto de matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,l} & \dots & P_{1,L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{m,1} & \dots & P_{m,l} & \dots & P_{m,L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{M,1} & \dots & P_{M,l} & \dots & P_{M,L} \end{bmatrix}_{z_1} = \begin{bmatrix} W_{1,1}^+ & \dots & W_{1,k}^+ & \dots & W_{1,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{m,1}^+ & \dots & W_{m,k}^+ & \dots & W_{m,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{M,1}^+ & \dots & W_{M,k}^+ & \dots & W_{M,K}^+ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{1,1}^+ & \dots & P_{1,l}^+ & \dots & P_{1,L}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{k,1}^+ & \dots & P_{k,l}^+ & \dots & P_{k,L}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{K,1}^+ & \dots & P_{K,l}^+ & \dots & P_{K,L}^+ \end{bmatrix}_{z_0} \quad (1.81)$$

e analogamente

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & \dots & P_{1,l} & \dots & P_{1,L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{k,1} & \dots & P_{k,l} & \dots & P_{k,L} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{K,1} & \dots & P_{K,l} & \dots & P_{K,L} \end{bmatrix}_{z_0} = \begin{bmatrix} W_{1,1}^- & \dots & W_{1,m}^- & \dots & W_{1,M}^- \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{k,1}^- & \dots & W_{k,m}^- & \dots & W_{k,M}^- \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{K,1}^- & \dots & W_{K,m}^- & \dots & W_{K,M}^- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{1,1}^- & \dots & P_{1,l}^- & \dots & P_{1,L}^- \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{m,1}^- & \dots & P_{m,l}^- & \dots & P_{m,L}^- \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{M,1}^- & \dots & P_{M,l}^- & \dots & P_{M,L}^- \end{bmatrix}_{z_1} \quad (1.82)$$

Na notação matricial, o Teorema da Reciprocidade atesta que (WAPE-NAAR E BERKHOUT 1989 [3]):

$$\mathbf{G}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) = [\mathbf{G}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)]^T \quad (1.83)$$

Para um meio acústico arbitrariamente não-homogêneo entre as superfícies z_0 e z_1 , não há disponíveis expressões analíticas para a função de Green. Entretanto, pode-se obter uma aproximação para a função de Green da seguinte forma:

1- Define-se o meio de referência que descreve acuradamente a geologia entre os níveis z_0 e z_1 o qual é não reflexivo fora desse intervalo.

2- Resolva numericamente a equação da onda bidirecional para a função de

Green:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\vec{r})} \vec{\nabla} g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) \right) - \frac{1}{K(\vec{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_A) \delta(t)$$

Com as condições iniciais:

$$g(\vec{r}, \vec{r}_A, t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

e

$$\frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}_A, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t < 0.$$

Com a fonte para o campo de onda de Green no ponto \vec{r}_A de coordenadas (x_A, y_A, z_A) , registra-se a resposta impulsiva para esse campo sobre a superfície $z = z_0$ de coordenadas (x, y, z_0) . Como a superfície $z = z_0$ foi escolhida não reflexiva para o campo de onda de Green, na mesma esse campo é puramente ascendente, ou seja, $g^-(x, y, z = z_0, x_A, y_A, z_A, t)$.

3- Aplica-se a transformada de Fourier temporal para obter-se

$$G^-(x, y, z_0; x_A, y_A, z_A; \omega)$$

4- Repete-se os passos 2 e 3 para cada ponto para o qual se deseja extrapolar o campo de onda registrado em $z = z_0$.

Capítulo 2

Extrapolação Inversa do Campo de Onda

Nesse capítulo se discutirá a extrapolção inversa do campo de onda acústico da superfície de aquisição S_0 para o ponto A. Na extrapolção direta, simulam-se os efeitos de propagação, já na extrapolção inversa o objetivo é eliminar tais efeitos. Para a extrapolção inversa utiliza-se a equação (1.51), que utiliza o complexo conjugado da função Green G^* . As razões pelas quais é feita esta opção serão apresentadas posteriormente. Além disso, a aplicação de tal expressão ao caso sísmico, requer uma série de considerações e aproximações que serão analisadas ao longo desse capítulo.

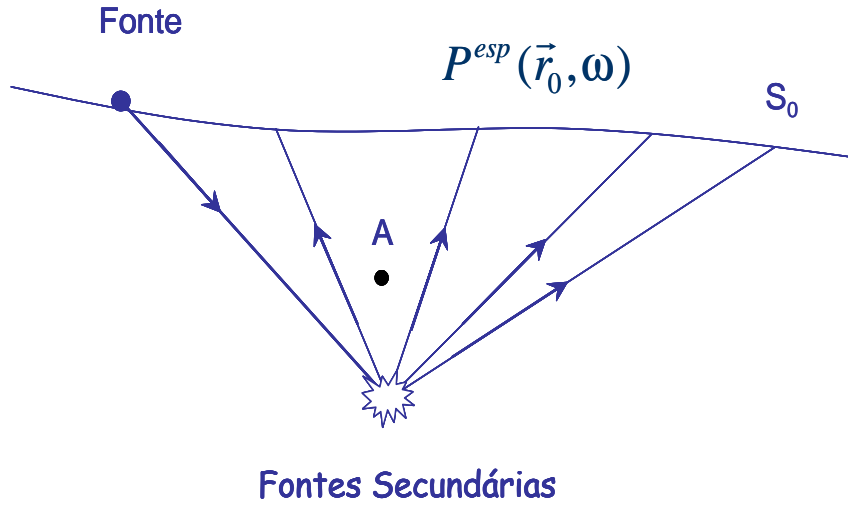


Figura 2.1: Situação de uma aquisição sísmica, em que um campo de onda incide em um objeto, é espalhado e registrado na superfície

2.1 Integral de Kirchhoff-Helmholtz para Extrapolação Inversa do Campo de Onda.

Considere a situação de uma aquisição sísmica representada na Figura (2.1). Nesta situação, considerando uma heterogeneidade no interior do modelo, tem-se o campo de ondas oriundo da fonte sísmica incidindo sobre tal heterogeneidade, dando origem a um novo campo de ondas espalhado, ou seja, a heterogeneidade se comporta como uma fonte secundária quando interage com o campo de ondas incidente.

O objetivo aqui é, a partir do campo espalhado $P^{esp}(\vec{r}_0, \omega)$, registrado na superfície, reconstruir o campo de onda espalhado em um ponto A interior ao modelo, ou seja, em subsuperfície. Note que a extrapolação apresentada no primeiro capítulo era do campo de ondas primário incidente na superfície S_0 , em um instante t , para o campo no ponto A, em um instante $t + \Delta t$. Agora, o sentido da extrapolação é do campo de ondas

espalhado incidente na superfície S_0 , em um instante t , para o campo espalhado no ponto A, em um instante $t - \Delta t$.

No capítulo anterior, o ponto de partida para a dedução dos operadores de extrapolação direta do campo de onda foi a equações (1.68), que utilizando a notação matricial, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}_1) = \mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)\mathbf{P}^+(\mathbf{z}_0) \quad (2.1)$$

e

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1) \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) = 2 \frac{\partial \mathbf{G}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)}{\partial z} \frac{1}{\rho(\mathbf{z}_0)} \quad (2.3)$$

e

$$\mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) = 2 \frac{\partial \mathbf{G}^+(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)}{\partial z} \frac{1}{\rho(\mathbf{z}_1)} \quad (2.4)$$

Assim, para se obter operadores de extrapolação inversa do campo de onda $\mathbf{F}^+(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)$ e $\mathbf{F}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)$, pode-se pensar em inverter os operadores de extrapolação direta $\mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)$ e $\mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)$, ou seja, escrever as equações (2.1) e (2.2) da seguinte forma:

$$\mathbf{P}^+(\mathbf{z}_0) = \mathbf{F}^+(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)\mathbf{P}(\mathbf{z}_1) \quad (2.5)$$

e

$$\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1) = \mathbf{F}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)\mathbf{P}(\mathbf{z}_0), \quad (2.6)$$

onde

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1) = [\mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)]^{-1} \quad (2.7)$$

e

$$\mathbf{F}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) = [\mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)]^{-1}. \quad (2.8)$$

Porém, segundo (WAPENAAR E BERKHOUT 1989 [3]) existem duas razões para não se usar as equações (2.7) e (2.8), a primeira é que os operadores $\mathbf{W}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)$ e $\mathbf{W}^-(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)$ são baseados nos reais parâmetros do meio K e ρ , entre os níveis z_0 e z_1 , os quais são desconhecidos no problema inverso. A segunda razão é que inverter os operadores de extrapolação direta como formulado pelas equações (2.7) e (2.8) um processo instável. Portanto, se discutirá o problema da extrapolação inversa baseados na integral de Kirchhoff-Helmholtz, equação (1.51), que utiliza o complexo conjugado da função de Green, com objetivo de se obter um operador de extrapolação estável e adequado ao uso na geofísica. Primeiramente considerar-se-á o caso mais simples, o homogêneo, posteriormente se aumentará a complexidade do meio.

No capítulo 1, chegou-se a conclusão que o campo de onda em um ponto \vec{r}_A , interior ao volume V , pode ser calculado utilizando as integrais de Kirchhoff-Helmholtz com o campo de onda de Green direto $G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$ ou inverso $G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)$, ou seja:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \oint_S \left[G \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) - P \left(\frac{1}{\rho} \nabla G \right) \right] \cdot \vec{n} dS \quad (2.9)$$

ou

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \oint_S \left[G^* \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) - P \left(\frac{1}{\rho} \nabla G^* \right) \right] \cdot \vec{n} dS. \quad (2.10)$$

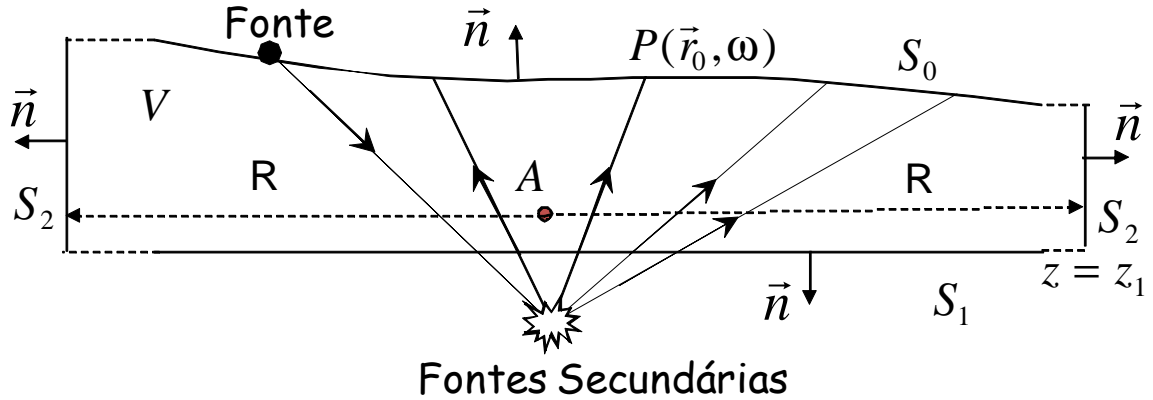


Figura 2.2: Geometria modificada do o volume V e superfície S , para extrapolação inversa do campo de onda espalhado em subsuperfície.

Essas duas expressões descrevem o campo de onda em um ponto \vec{r}_A , interior ao volume V , circundado pela superfície S , em termos do campo e sua derivada normal sobre tal superfície. Para a dedução dos operadores de extrapolação direta do campo de onda, se utilizou como base a equação (2.9). Agora, se utilizará como ponto de partida a equação (2.10) para a dedução dos operadores de extrapolação inversa do campo de onda.

Considerando a geometria da Figura (1.4), a contribuição da integral ao longo da superfície S_1 , sobre o campo de onda no ponto A , não tende a zero quando \vec{r} tende a infinito, ou seja, o campo de onda físico e o campo de onda de Green inverso não obedecem à condição de radiação de Sommerfeld sobre a superfície S_1 . Portanto faz-se necessário a escolha de uma outra geometria, e no caso de exploração geofísica, a análise sobre quais condições pode-se descartar a contribuição da integral sobre S_1 , em função de só se possuir informações sobre S_0 .

Considere a geometria modificada da Figura (2.2), onde tem-se a superfície de aquisição S_0 , a superfície plana S_1 , e a superfície cilíndrica S_2 , com eixo vertical

passando por A e raio R. O campo de onda físico é originado em um objeto espalhador (fonte secundária) em subsuperfície, abaixo de S_1 . O objetivo principal é encontrar uma expressão que descreva o campo de onda espalhado no ponto A, em subsuperfície, em função do campo e sua derivada normal sobre a superfície de aquisição S_0 .

Analizando a aplicação da equação (2.10), percebe-se que a contribuição da integral sobre a superfície S_2 tende a zero quando R tende a infinito¹. Portanto, o campo de onda no ponto A pode ser expresso pela contribuição da integral sobre a superfície S_0 mais a integral sobre a superfície S_1 , ou seja:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = P_0(\vec{r}_A, \omega) + \Delta P(\vec{r}_A, \omega) \quad (2.11)$$

onde

$$P_0(\vec{r}_A, \omega) = \int_{S_0} \left[G^* \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla G^* \right) \right] \cdot \vec{n} dS_0 \quad (2.12)$$

e

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{S_1} \left[G^* \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) - P \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla G^* \right) \right] \cdot \vec{n} dS_1. \quad (2.13)$$

Quando o termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$ puder ser descartado, ou seja, quando a integral sobre a superfície S_1 tiver pouca influência sobre o campo de onda no ponto A, a equação (2.12) descreverá a extrapolação inversa do campo de onda da superfície de aquisição S_0 para o ponto A em subsuperfície. A análise que se faz necessária nesse momento, é sob quais condições o termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$ pode ser descartado.

Sobre a superfície S_1 o campo de onda acústico consiste em uma parte

¹A superfície cilíndrica é proporcional a R e o integrando proporcional a , pelo menos, $1/R^2$

ascendente $P^-(\vec{r}, \omega)$ relacionado com a fonte abaixo de z_1 , e uma parte descendente $P^+(\vec{r}, \omega)$ relacionado com as reflexões acima de z_1 , ambos incluindo os termos de ordem superior. Portanto o campo total em z_1 é:

$$P(\vec{r}, \omega) = P^+(\vec{r}, \omega) + P^-(\vec{r}, \omega), \quad \text{em } z = z_1. \quad (2.14)$$

Como visto no primeiro capítulo, para o campo de onda de Green pode-se escolher qualquer meio de referência abaixo de z_1 , ou seja, fora do volume V. Assim, ao se escolher $c(x, y, z > z_1) = c(x, y, z_1)$ e $\rho(x, y, z > z_1) = \rho(x, y, z_1)$, o campo de onda de Green na superfície z_1 é puramente descendente, então:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) = G^+(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega), \quad \text{em } z = z_1. \quad (2.15)$$

Assim pode-se escrever a equação (2.13) como:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[(G^+)^* \left(\frac{\partial P^+}{\partial z} + \frac{\partial P^-}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial G^+}{\partial z} \right)^* (P^+ + P^-) \right]_{z_1} dx dy. \quad (2.16)$$

Como pode ser visto no apêndice B, a equação (2.16) pode ser escrita da seguinte forma

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial G^+}{\partial z} \right)^* (P^+) \right]_{z_1} dx dy. \quad (2.17)$$

O resultado apresentado pela equação (2.17) é bastante importante, e segundo ele somente os campos de onda $(G^+)^*$ e P^+ que se propagam em direções opostas,

sobre a superfície z_1 , é que contribuem para o termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$, que se entende por ser o termo diferença entre o valor do campo de onda real no ponto A, e o valor do campo extrapolado, utilizando-se somente o registro na superfície de aquisição.

A partir da Figura (2.2) é possível perceber que, para o caso homogêneo, $P^+(\vec{r}, \omega)$ é zero em $z = z_1$, com isso tem-se também que

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = 0. \quad (2.18)$$

Então, a partir da equação (2.11) e (2.12), conclui-se que para o caso homogêneo, a expressão para a extrapolação inversa do campo de onda acústico da superfície de aquisição S_0 para o ponto A em subsuperfície é:

$$P(\vec{r}_A, \omega) = P_0(\vec{r}_A, \omega) = \int_{S_0} \frac{1}{\rho} [G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) \nabla P(\vec{r}, \omega) - P(\vec{r}, \omega) \nabla G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)] \cdot \vec{n} dS_0. \quad (2.19)$$

Vale lembrar que esse resultado considera que a contribuição da integral sobre região do número de onda das ondas evanescentes, pode ser descartado no termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$. Na próxima subseção se analisará o termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$, para extrapolação inversa do campo de onda em meios heterogêneos.

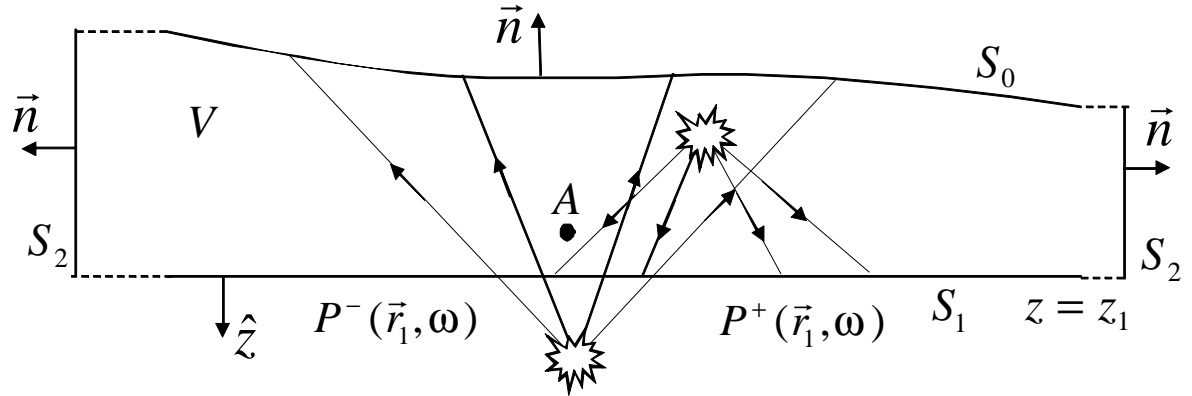


Figura 2.3: Campo de onda ascendente e descendente sobre a superfície S_1 .

2.2 Extrapolação Inversa do Campo de Onda Acústico para Meios Heterogêneos

2.2.1 Interface de Aquisição Curva

Considere a representação da Figura (2.3), observe que agora existem heterogeneidades acima da superfície S_1 . Tais heterogeneidades causam em z_1 um campo de onda descendente $P^+(\vec{r}_1, \omega)$, assim, a partir da equação (2.17) percebe-se que o termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$ não é zero para tal situação.

Então, faz-se necessário a análise da equação (2.17) para os casos heterogêneos, com o objetivo de se obter uma estimativa do erro cometido ao se desprezar $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$.

A partir da Figura (2.4) percebe-se que o campo de onda total sobre a superfície z_1 é:

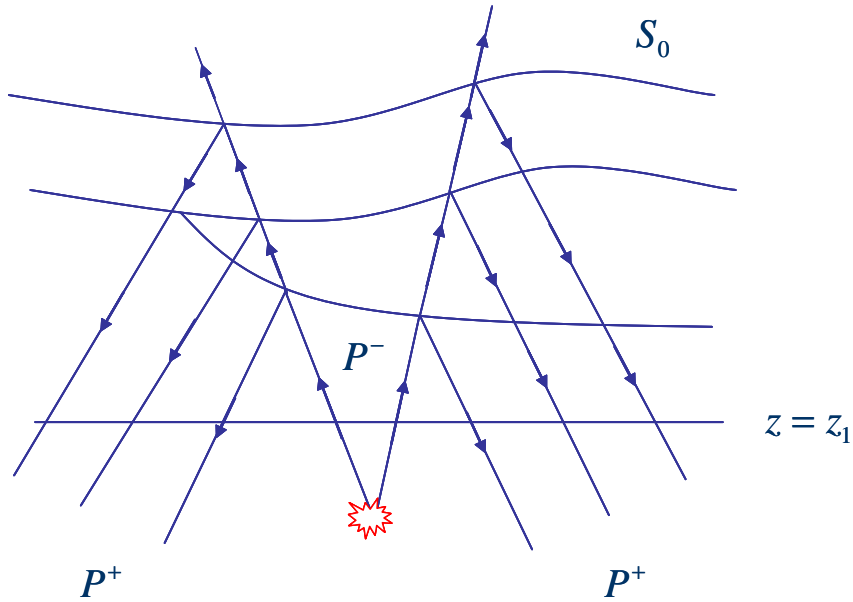


Figura 2.4: Campo ascendente espalhado por fontes secundárias e descendente espalhado por fontes terciárias (refletores no caso). O campo total em z_1 tem uma parte ascendente P^+ e uma parte descendente P^- .

$$P(\vec{r}_1, \omega) = P^+(\vec{r}_1, \omega) + P^-(\vec{r}_1, \omega). \quad (2.20)$$

Entretanto, segundo a equação (2.17), o termo $\Delta P(\vec{r}_A, \omega)$ depende somente do campo de onda descendente, ou seja, $P^+(\vec{r}_1, \omega)$ que é o campo espalhado por heterogeneidades acima de S_1 . Por outro lado, a função de Green sobre a superfície S_1 , cuja fonte esta sobre o ponto A, é exclusivamente descendente, contendo uma parte que vai direto de A para S_1 e outra parte que reflete nas heterogeneidades acima de A e chega a S_1 . A Figura (2.5) ilustra tal situação.

Assim pode-se escrever que $G^+(\vec{r}_1, \vec{r}_A, \omega)$ contém uma parte direta e uma

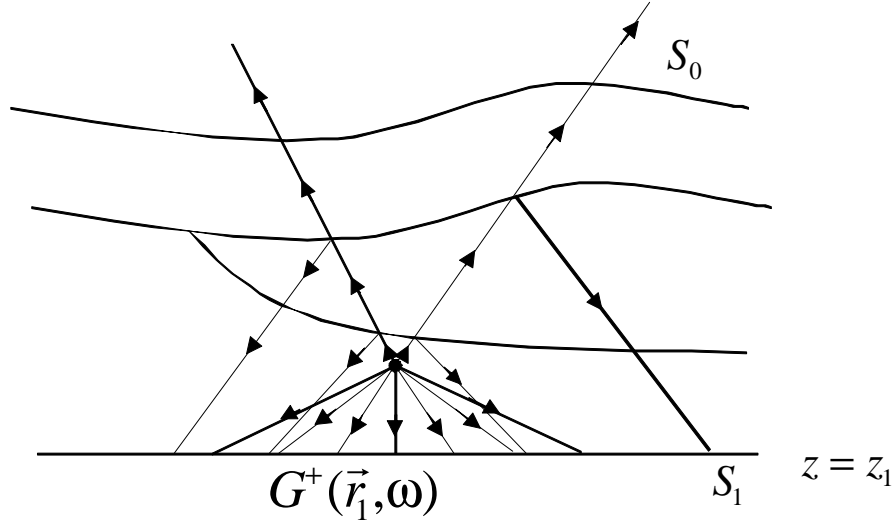


Figura 2.5: Função de Green para o caso heterogêneo.

parte espalhada sobre a superfície S_1 em $z = z_1$.

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_A, \omega) = G^+(\vec{r}_1, \vec{r}_A, \omega) = G_d^+(\vec{r}_1, \vec{r}_A, \omega) + G_e^+(\vec{r}_1, \vec{r}_A, \omega). \quad (2.21)$$

Onde o índice d representa o campo de onda direto e o e o espalhado. Com isso a equação (2.17), para tal situação, fica:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(G_d^+ + G_e^+)}{\partial z} \right)^* (P^+) \right]_{z_1} dx dy, \quad (2.22)$$

portanto

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \Delta P_1(\vec{r}_A, \omega) + \Delta P_2(\vec{r}_A, \omega), \quad (2.23)$$

com

$$\Delta P_1(\vec{r}_A, \omega) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial G_d^+}{\partial z} \right)^* (P^+) \right]_{z_1} dx dy \quad (2.24)$$

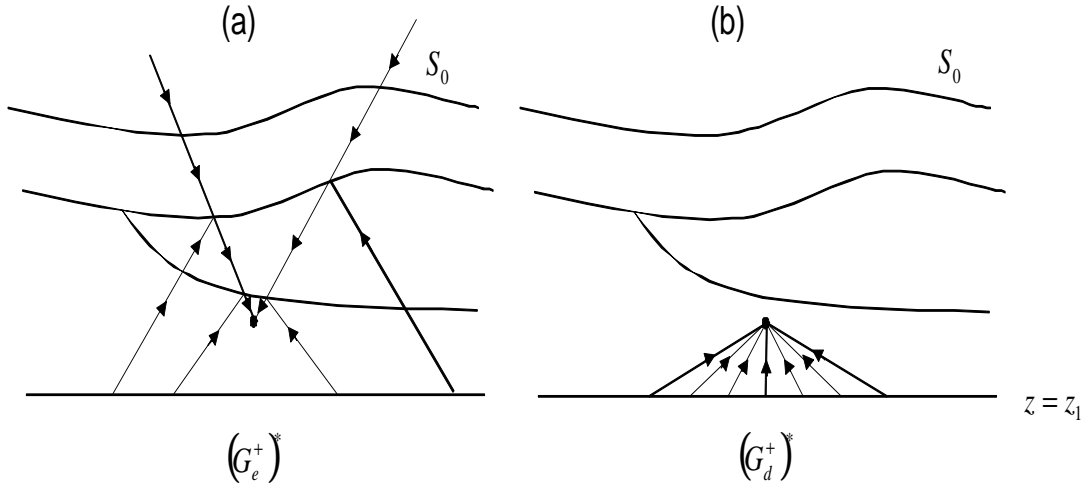


Figura 2.6: (a) complexo conjugado da função de Green espalhada nas heterogeneidades acima do ponto A. (b) complexo conjugado da função de Green direta do ponto A até S_1 .

e

$$\Delta P_2(\vec{r}_A, \omega) = -2 \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial G_e^+}{\partial z} \right)^* (P^+) \right]_{z_1} dx dy. \quad (2.25)$$

De acordo com a Figura (2.6) percebe-se que o termo $\Delta P_1(\vec{r}_A, \omega)$, que é a extrapolação inversa do campo $P^+(\vec{r}_1, \omega)$ diretamente da superfície z_1 para o ponto A, representa o campo de onda total descendente no ponto A, ou seja:

$$\Delta P_1(\vec{r}_A, \omega) = P^+(\vec{r}_A, \omega). \quad (2.26)$$

Já o termo $\Delta P_2(\vec{r}_A, \omega)$ representa a extrapolação inversa do campo $P^+(\vec{r}_1, \omega)$ de z_1 para o ponto A, através da função de Green que reflete nas camadas superiores a A, indicando assim que $\Delta P_2(\vec{r}_A, \omega)$ representa uma parte do campo de onda ascendente no ponto A², (lembre-se que o objetivo é calcular o campo de onda ascendente total no ponto

²Tem-se em vista a migração sísmica.

A). Isso indica que o termo $\Delta P_1(\vec{r}_A, \omega)$ não influencia no cálculo do campo ascendente em A, sendo portanto este influenciado apenas por $\Delta P_2(\vec{r}_A, \omega)$. Então:

$$\Delta P_2(\vec{r}_A, \omega) = \Delta P^-(\vec{r}_A, \omega). \quad (2.27)$$

Assim o campo total ascendente no ponto A é:

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) = P_0^-(\vec{r}_A, \omega) + \Delta P^-(\vec{r}_A, \omega), \quad (2.28)$$

onde

$$P_0^-(\vec{r}_A, \omega) = P_0(\vec{r}_A, \omega). \quad (2.29)$$

Percebe-se a partir das equações (2.25) e (2.27) que o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$ é proporcional ao produto do campo espalhado nas interfaces do meio heterogêneo P^+ e a derivada normal do campo de onda de Green inverso também espalhado nas interfaces $\left(\frac{G_e^+}{\partial z}\right)^*$, assim pode-se dizer que a magnitude do termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$ é proporcional ao quadrado da refletividade das interfaces do meio. Conseqüentemente para meios com baixos ou moderados contrastes de impedâncias acústicas, nos quais a refletividade das interfaces é baixa, o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$ tem pequena magnitude e pode ser descartado, com isso, a partir das equações (2.28) e (2.29) tem-se que:

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx P_0^-(\vec{r}_A, \omega). \quad (2.30)$$

Então, a partir da equação (2.12) pode-se escrever que:

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx \int_{S_0} \frac{1}{\rho(\vec{r})} [G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega) \nabla P(\vec{r}, \omega) - P(\vec{r}, \omega) \nabla G^*(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)] \cdot \vec{n} dS_0. \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é usada por vários autores para fazer a extrapolação inversa do campo de onda da superfície de observação para pontos interiores ao meio de propagação, (SCHNEIDER,1978 [7]), (BERKHOUT,1985 [9]), (CLAYTON E STOLT,1981 [10]), (CASTLE,1982 [11]), (CARTER E FRAZER,1984 [12]), (WIGGINGS,1984 [13]), (BERRYHILL,1984 [14]). Entretanto ao se usar tal equação está descartando-se as ondas evanescentes e o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$. Como já foi discutido, o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$ só pode ser descartado para meios com baixos ou moderados contrastes e nesse caso a equação (2.31) descreve a extrapolação inversa do campo de onda com boa aproximação. Caso contrário o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$ não pode ser descartado e tem que se buscar uma maneira de estimá-lo (WAPENAAR E BERKHOUT,1989 [3]).

2.2.2 Interface de Aquisição Plano-Horizontal (Integrais de Rayleigh)

Quando a superfície de aquisição S_0 é plano-horizantal, o vetor normal a tal superfície apontando para fora, é $-\hat{z}$, Figura (2.7). Com isso, pode -se escrever a equação (2.31) como

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx - \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \frac{1}{\rho} [G^* \nabla P - P \nabla G^*]_{z_0} \cdot \hat{z} dx dy, \quad (2.32)$$

assim tem-se

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \frac{1}{\rho} \left[P \frac{\partial G^*}{\partial z} - G^* \frac{\partial P}{\partial z} \right]_{z_0} dx dy. \quad (2.33)$$

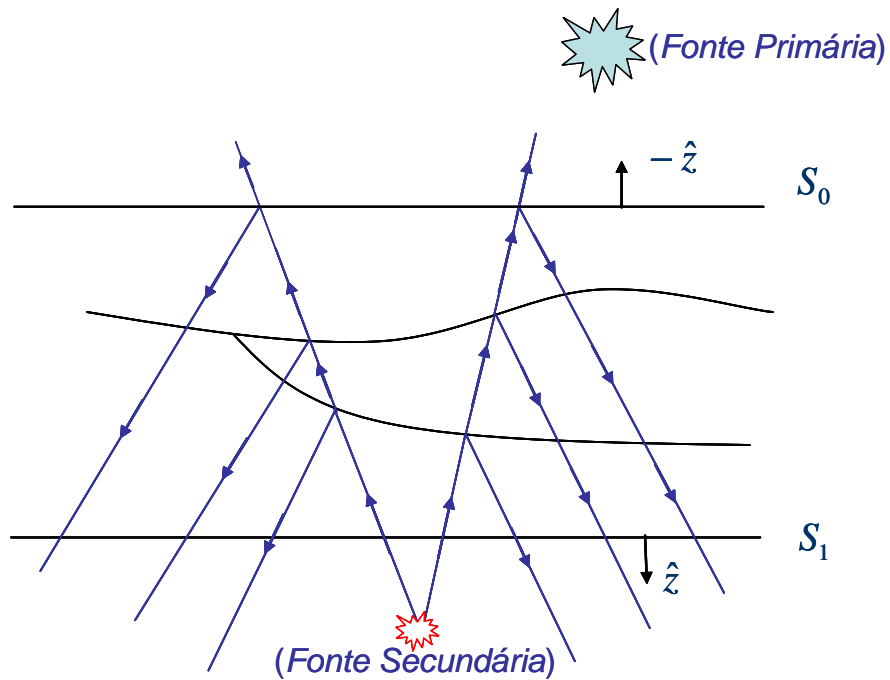


Figura 2.7: O campo total na superfície de aquisição S_0 é a soma do campo descendente P^+ , relativo a fonte primária acima de S_0 , e o campo P^- , relativo a fonte secundária abaixo de S_1 .

Lembre-se que para se escrever a equação (2.31) e conseqüentemente a equação (2.32) está descartando-se o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$.

Como visto na Figura (2.7), o campo de onda acústico total sobre a superfície S_0 em $z = z_0$ é

$$P(x, y, z_0, \omega) = P^+(x, y, z_0, \omega) + P^-(x, y, z_0, \omega), \quad (2.34)$$

com tais considerações, a equação (2.33) escreve-se (Lembre-se que a função

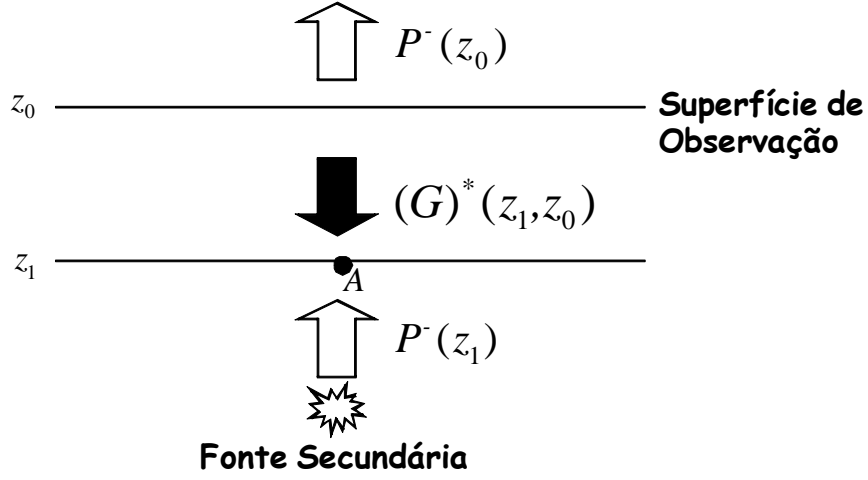


Figura 2.8: Esquema representando a extrapolação inversa da superfície de aquisição S_0 para o ponto A sobre a superfície S_1 .

de Green é não reflexiva sobre as superfícies S_0)

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[(P^+ + P^-) \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^* - (G)^* \left(\frac{\partial(P^+ + P^-)}{\partial z} \right) \right]_{z_0} dx dy. \quad (2.35)$$

A equação (2.35) tem a mesma forma da equação (2.16), assim analogamente pode-se escrever que:

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^* P^- \right]_{z_0} dx dy \quad (2.36)$$

ou

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P^-}{\partial z} (G)^* \right]_{z_0} dx dy. \quad (2.37)$$

A Figura (2.8) ilustra a situação de extrapolação inversa do campo de onda acústico ascendente da superfície de observação z_0 para o ponto A em z_A .

De maneira semelhante, como sugere a Figura (2.9), se a fonte do campo de

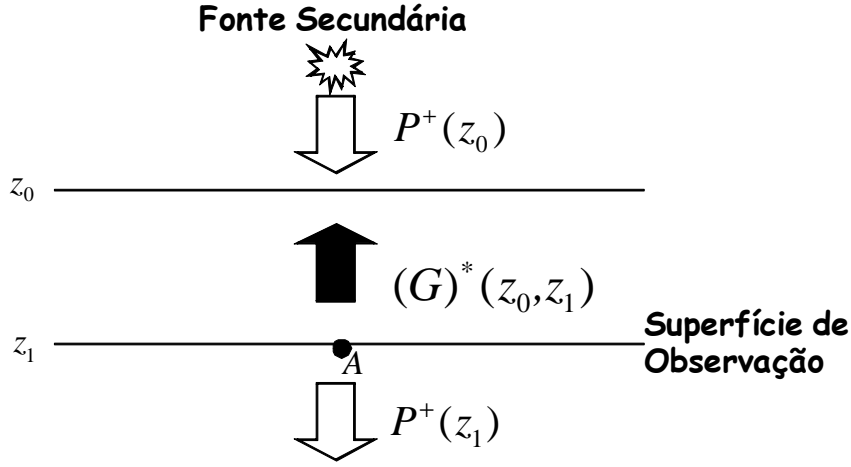


Figura 2.9: Esquema representando a extrapolação inversa da superfície de aquisição S_1 para um ponto sobre a superfície S_0 .

onda secundário descendente estiver acima da superfície $z = z_0$ e a superfície de observação desse campo for $z = z_A$, pode-se escrever para esse caso que

$$P^+(\vec{r}_0, \omega) \approx 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial G^+}{\partial z} \right)^* P^+ \right]_{z_1} dx dy \quad (2.38)$$

ou

$$P^+(\vec{r}_0, \omega) \approx -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P^+}{\partial z} (G^+)^* \right]_{z_0} dx dy \quad (2.39)$$

As equações (2.36) e (2.37) permitem realizar a extrapolação inversa do campo de onda acústico ascendente, espalhado por uma fonte secundária em subsuperfície, da superfície de observação plana S_0 para um ponto A interior ao meio de propagação. Tais equações são conhecidas por integrais de Rayleigh para extrapolação inversa do campo de onda acústico. Entretanto, vale lembrar que as expressões de Rayleigh para extrapolação inversa são aproximações do campo ascendente em um ponto interior ao meio $P^-(\vec{r}_A, \omega)$,

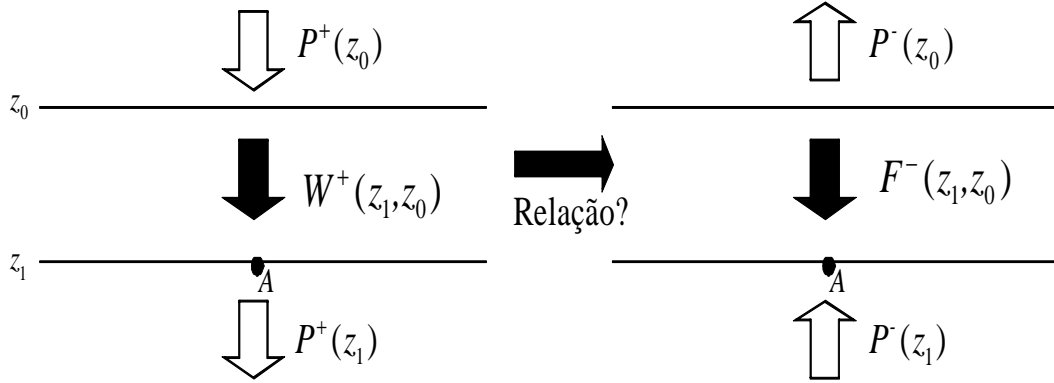


Figura 2.10: Representação da extrapolação do campo de onda, direta e inversa, da superfície S_0 para S_1 .

válidas principalmente para meios suaves.

2.3 Operadores para Extrapolação Inversa

Nesta seção o objetivo é obter operadores de extrapolação inversa do campo de onda, para meios arbitrariamente heterogêneos. No primeiro capítulo, foram deduzidos os operadores de extrapolação direta \mathbf{W}^+ e \mathbf{W}^- , agora o objetivo é deduzir operadores de extrapolação inversa do campo de onda e se analisar sua relação com os operadores de extrapolação direta.

Tomando por base a equação (2.36)

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \left[\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right)^* P^- \right]_{z_0} dx dy, \quad (2.40)$$

pode-se escrever a mesma da seguinte forma

$$P^-(\vec{r}_A, \omega) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^-(\vec{r}_A, \vec{r}_0) P^-(\vec{r}_0, \omega) dx_0 dy_0 \quad (2.41)$$

onde

$$F^-(\vec{r}_A, \vec{r}_0, \omega) = \left[\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z} \right)^* \right]_{z_0}. \quad (2.42)$$

Analogamente, ao se tomar por base a equação (2.38) tem-se

$$P^+(\vec{r}_0, \omega) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F^+(\vec{r}_0, \vec{r}_A) P^+(\vec{r}_A, \omega)]_{z_1} dx dy, \quad (2.43)$$

com

$$F^+(\vec{r}_0, \vec{r}_A, \omega) = \left[\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial G(\vec{r}_A, \vec{r}, \omega)}{\partial z} \right)^* \right]_{z_1}. \quad (2.44)$$

Considere as equações (1.69) e (1.70) para a extrapolação direta do campo

de onda

$$P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^+(\vec{r}_A, \vec{r}_0) P^+(\vec{r}_0, \omega) dx_0 dy_0 \quad (2.45)$$

e

$$W^+(\vec{r}_A, \vec{r}_0, \omega) = \left[\frac{2}{\rho} \frac{\partial G^-(\vec{r}, \vec{r}_A, \omega)}{\partial z} \right]_{z_0}. \quad (2.46)$$

Comparando as equações (2.42) e (2.46), percebe-se claramente que o operador de extrapolação inversa F^- é o complexo conjugado do operador de extrapolação direta W^+ , para extrapolação do nível z_0 para o nível $z_1 = z_A$.

$$F^-(\vec{r}_A, \vec{r}_0, \omega) = [W^+(\vec{r}_A, \vec{r}_0, \omega)]^*. \quad (2.47)$$

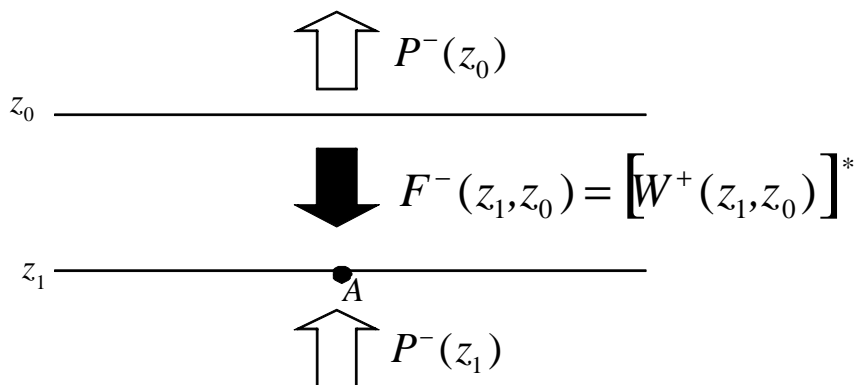


Figura 2.11: Representação da extrapolação inversa do campo de onda da superfície de aquisição z_0 para a superfície z_1 , utilizando-se o operador $F^-(z_A, z_0)$.

Analogamente pode-se deduzir a relação entre os operadores de extrapolação

F^+ e W^- e obter-se a seguinte relação

$$F^+(\vec{r}_0, \vec{r}_A, \omega) = [W^-(\vec{r}_0, \vec{r}_A, \omega)]^*. \quad (2.48)$$

Esses resultados são fundamentais na obtenção de operadores de extrapolação inversa do campo de onda.

Como já mencionado no capítulo anterior os dados sísmicos são discretos e as equações de extrapolação de campo de onda devem ser escritas de maneira discreta, sendo necessária toda uma interpretação e formulação matemática adequada. A equação (2.41) responsável por realizar a extrapolação inversa do campo de onda, da superfície z_0 para um ponto sobre a superfície $z_1 = z_A$, pode ser escrita como um somatório e cada

termo interpretado como matrizes. Assim

$$P^-(m\Delta x, z_1, \omega) \approx 2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[\left(\frac{\partial G^-(k\Delta x, z_0; m\Delta x, z_1; \omega_i)}{\partial z} \right)^* \frac{\Delta x}{\rho(k\Delta x, z_0)} P^-(k\Delta x, z_0, \omega_i) \right]. \quad (2.49)$$

Analogamente à formulação matricial do capítulo anterior, a equação somatório (2.49) pode ser escrita como um produto de matrizes. Entretanto no caso do campo espalhado, o que se registra na superfície é o campo ascendente originado por um conjunto de pontos espalhadores. Esse registro será representado por uma única coluna da matriz $\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_0)$, a qual terá ordem $K \times 1$, onde K é o número de receptores na superfície. A matriz do campo de onda extrapolado $\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1)$, também terá somente uma coluna e terá ordem $M \times 1$, onde M é o número de pontos para onde se deseja extrapolar o campo. O operador de extrapolação inversa $\mathbf{F}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0)$ terá a mesma ordem do operador $[W^+(\vec{r}_A, \vec{r}_0, \omega)]^*$, que é $M \times K$. Assim pode-se escrever tais matrizes como:

$$\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} P_{1,1}^- \\ \vdots \\ P_{k,1}^- \\ \vdots \\ P_{K,1}^- \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{F}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} W_{1,1}^+ & \cdots & W_{1,k}^+ & \cdots & W_{1,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{m,1}^+ & \cdots & W_{m,k}^+ & \cdots & W_{m,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{M,1}^+ & \cdots & W_{M,k}^+ & \cdots & W_{M,K}^+ \end{bmatrix}^*, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1) = \begin{bmatrix} P_{1,1}^- \\ \vdots \\ P_{m,1}^- \\ \vdots \\ P_{M,1}^- \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Assim tem-se

$$\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1) \approx \mathbf{F}^-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0) \mathbf{P}^-(\mathbf{z}_0), \quad (2.53)$$

que explicitamente fica:

$$\begin{bmatrix} P_{1,1}^- \\ \vdots \\ P_{m,1}^- \\ \vdots \\ P_{M,1}^- \end{bmatrix}_{z_1} \approx \begin{bmatrix} W_{1,1}^+ & \dots & W_{1,k}^+ & \dots & W_{1,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{m,1}^+ & \dots & W_{m,k}^+ & \dots & W_{m,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{M,1}^+ & \dots & W_{M,k}^+ & \dots & W_{M,K}^+ \end{bmatrix}^* \times \begin{bmatrix} P_{1,1}^- \\ \vdots \\ P_{k,1}^- \\ \vdots \\ P_{K,1}^- \end{bmatrix}_{z_0}. \quad (2.54)$$

Cada termo da matriz $\mathbf{P}^-(\mathbf{z}_1)$ representa o campo de onda extrapolado em um ponto interior ao volume V . A equação (2.54) realiza a extrapolação inversa do campo de onda acústico, da superfície de aquisição z_0 para um ponto ou conjunto de pontos sobre a superfície z_1 . A Figura (2.11) ilustra tal situação.

Analogamente para a extrapolação inversa do campo de onda da superfície

de aquisição z_1 para a superfície z_0 , escreve-se

$$\begin{bmatrix} P_{1,1}^+ \\ \vdots \\ P_{k,1}^+ \\ \vdots \\ P_{K,1}^+ \end{bmatrix}_{z_0} \approx \left(\begin{bmatrix} W_{1,1}^+ & \cdots & W_{1,k}^+ & \cdots & W_{1,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{m,1}^+ & \cdots & W_{m,k}^+ & \cdots & W_{m,K}^+ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ W_{M,1}^+ & \cdots & W_{M,k}^+ & \cdots & W_{M,K}^+ \end{bmatrix}^* \right)^T \times \begin{bmatrix} P_{1,1}^+ \\ \vdots \\ P_{m,1}^+ \\ \vdots \\ P_{M,1}^+ \end{bmatrix}_{z_1} \quad (2.55)$$

Por vários motivos, a equação (2.54) representa uma aproximação para o campo de onda extrapolado. Primeiramente, a mesma é obtida a partir da equação (2.40), que já é uma aproximação. Somado a isso tem o fato da superfície de observação ser limitada e discreta, além de se ter disponível somente uma aproximação da função de Green do meio de propagação. Uma análise da precisão da equação (2.54), para os parâmetros de aquisição sísmica é fundamental para se ter idéia da qualidade dos resultados obtidos. Para se ter uma boa seção migrada em profundidade, por exemplo, muitos fatores estão envolvidos e a extrapolção do campo de onda, tanto direta como inversa, com certeza são dois desses fatores.

Capítulo 3

Migração Sísmica em Profundidade

Quando gera-se um pulso sísmico que se propaga através das camadas geológicas em subsuperfície o que se registra na superfície de aquisição é o tempo que essa frente de onda levou para se propagar através das camadas geológicas, refletir em uma interface de separação de dois meios e retornar a superfície, assim como sua amplitude, sendo registrados nas estações receptoras (sismograma). A migração sísmica consiste essencialmente em, a partir do sismograma, determinar-se o posicionamento dos refletores em subsuperfície, seja em profundidade ou em tempo. Para a realização desse posicionamento dos refletores, precisa-se basicamente, da extrapolação do campo de onda e da imposição de uma condição de imagem. Dentre os métodos de extrapolação do campo estão os que se baseiam na solução da equação da onda, podendo ser uma solução diferencial ou uma solução integral. A solução diferencial é baseada na série de Taylor, já a solução integral é baseada em toda teoria descrita nos capítulos 1 e 2 deste trabalho. Entretanto existem

várias condições de imagem, podendo ser destacadas:

$$M_l(i, j, k, t) = p_{ref}(i, j, k, t = TD(i, j, k)) \quad (3.1)$$

$$M_l(i, j, k, t) = \frac{p_{ref}(i, j, k, t = TD(i, j, k))}{p_{inc}(i, j, k, t = TD(i, j, k)) + \epsilon}, \quad (3.2)$$

$$M_l(i, j, k, t) = \sum_{t=0}^{T_{final}} p_{ref}(i, j, k, t) p_{inc}(i, j, k, t), \quad (3.3)$$

$$M_l(i, j, k, t) = \frac{\sum_{t=0}^{T_{final}} p_{ref}(i, j, k, t) p_{inc}(i, j, k, t)}{\sum_{t=0}^{T_{final}} p_{inc}(i, j, k, t) p_{inc}(i, j, k, t) + \epsilon}. \quad (3.4)$$

A adição do termo ϵ no denominador das equações (3.2) e (3.4) é para evitar divisões por zero e instabilidade numérica na divisão por valores muito pequenos. O termo p_{inc} representa o campo de onda incidente em determinado ponto em subsuperfície, p_{ref} representa o campo de onda refletido no mesmo ponto, $M_l(i, j, k, t)$ representa os elementos da matriz de migração e $TD(i, j, k)$ o tempo de transito da onda direta, (BOECHAT,2007 [15]).

Então, um esquema de migração sísmica em profundidade, basicamente, pode ser compreendido em simulação dos efeitos de propagação ao longo das camadas geológicas, extrapolação do campo de onda registrado na superfície (ou reconstrução do campo de onda) e a imposição de uma condição de imagem. Vale ressaltar que para todo o processo é necessário que se tenha um modelo de velocidade.

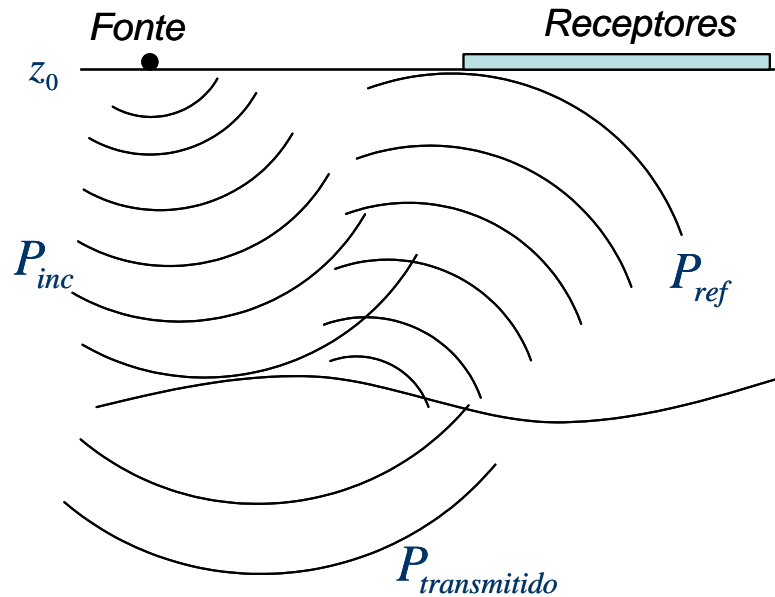


Figura 3.1: Esquema de uma aquisição sísmica.

3.1 Esquema de Migração Sísmica em Profundidade

Considere o esquema de aquisição mostrado na Figura (3.1), onde se tem uma fonte na superfície gerando uma frente de onda que se propaga em subsuperfície, ao encontrar um contraste de impedância entre dois meios, uma parte da energia incidente reflete sendo registrada na superfície de aquisição e a outra parte transmitida para a outra camada, continuando a propagação. O que é registrado na superfície é o tempo desde a detonação da fonte até a chegada das reflexões, assim como a amplitude do campo de ondas refletido.

Como já mencionado, para se realizar a migração desses dados registrados precisa-se da extrapolação do campo de onda registrado na superfície e da aplicação de uma condição de imagem. A extrapolação do campo de onda através dos métodos integrais, tanto direta como inversa, necessita da função de Green do problema. Como

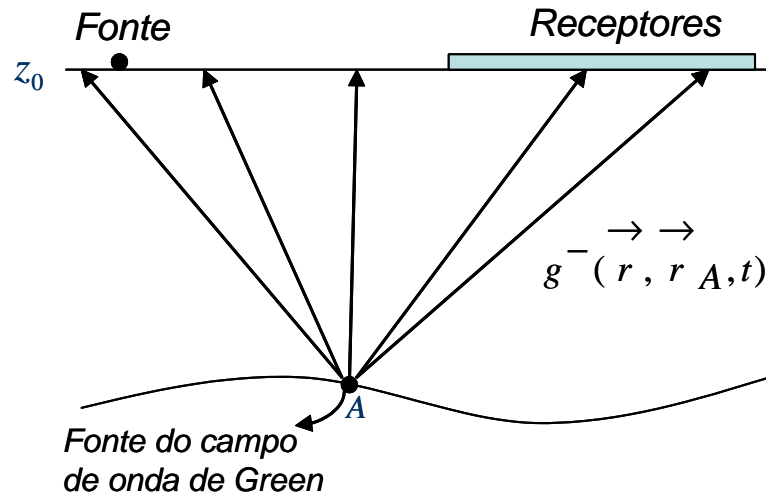


Figura 3.2: Esquema representando a obtenção numérica da função de Green para um dado modelo de velocidades.

já mencionado, para meios geológicos relativamente complexos, não se tem expressões analíticas para a função de Green, sendo entretanto adequado a obtenção de aproximações numéricas para tal função. A partir da simulação de uma fonte impulsiva sobre um ponto A, em subsuperfície, e registro sobre a superfície de observação, tem-se uma aproximação numérica para a função de Green associada ao modelo de velocidades disponível e ao ponto onde se tem a fonte impulsiva. A Figura (3.2) ilustra tal situação.

De posse da função de Green do problema (ou campo de onda de Green) pode-se realizar tanto a extrapolação direta do campo de onda acústico a partir da fonte como a extrapolação inversa do campo de onda a partir do sismograma, obtendo-se assim $p_{inc}(\vec{r}_A, t)$ e $p_{ref}(\vec{r}_A, t)$ respectivamente.

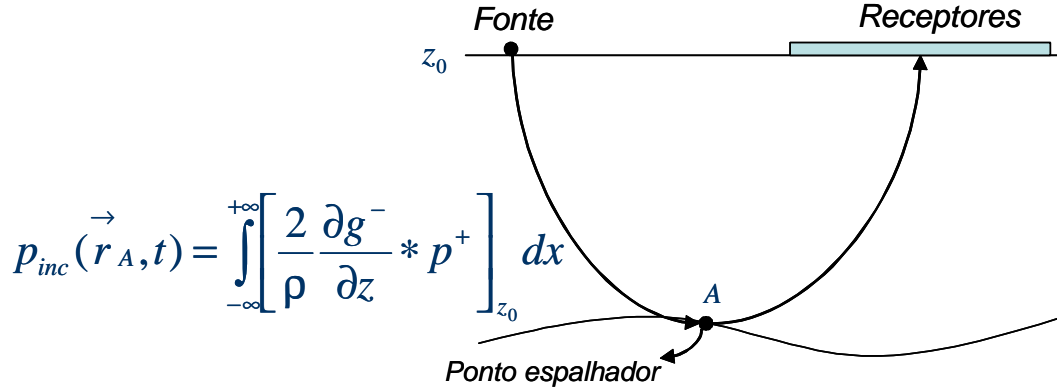


Figura 3.3: O campo de onda incidente no ponto A pode ser determinado a partir da integral de Rayleigh, utilizando-se o campo de onda de Green G^+ cuja fonte encontra-se sobre o ponto A.

3.1.1 Extrapolação Direta do campo de onda no Domínio do Tempo

Para a realização da extrapolação direta do campo de onda com objetivo de se determinar $p_{inc}(i, j, k, t)$ utiliza-se a equação (1.64) a partir da fonte, que para o caso bidimensional, no domínio do tempo, escreve-se

$$p_{inc}(\vec{r}_A, t) = p(\vec{r}_A, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2}{\rho(\vec{r}')} \frac{\partial g^-(\vec{r}', \vec{r}_A, t)}{\partial z} * p^+(\vec{r}', t) \right]_{z_0} dx \quad (3.5)$$

A partir da resposta impulsiva do meio de propagação, ou seja, da função de Green do problema, pode-se simular através da equação (3.5), os efeitos de propagação desde o ponto de detonação da fonte até o ponto A, onde ocorre uma reflexão que é registrada na superfície. Com isso consegue-se determinar o campo de onda incidente no ponto A, conforme sugere a Figura (3.3).

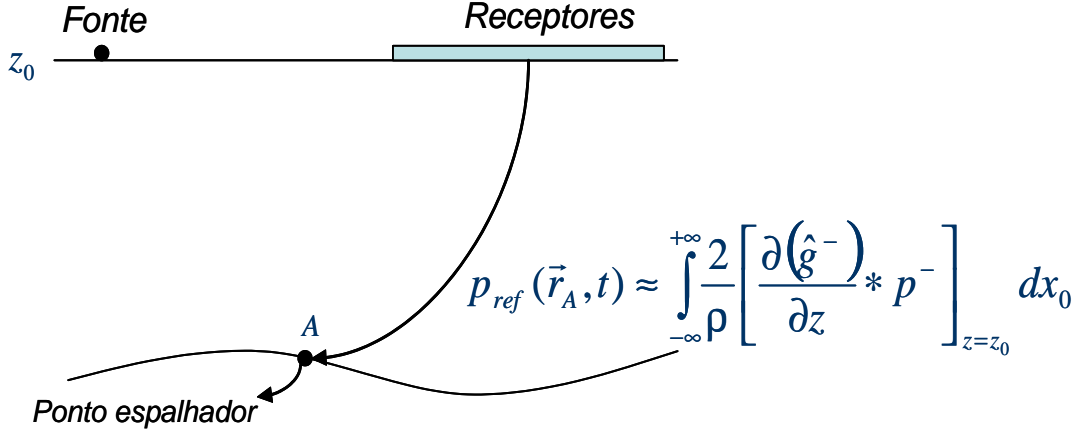


Figura 3.4: Representação da obtenção, aproximada, do campo de onda refletido $p_{ref}(\vec{r}_A, t)$ no ponto A, através da eliminação dos efeitos de propagação.

3.1.2 Extrapolação Inversa do Campo de Onda no Domínio do Tempo.

Para a realização da extrapolação inversa do campo de onda registrado na superfície, com o objetivo de se determinar $p_{ref}(\vec{r}_A, t)$, utiliza-se a equação (2.40), que para o caso bidimensional, no domínio do tempo, escreve-se

$$p_{ref}(\vec{r}_A, t) = p^-(\vec{r}_A, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial(\hat{g}^-)}{\partial z} \right) * p^- \right]_{z_0} dx \quad (3.6)$$

O objetivo da aplicação da equação (3.6) é eliminar os efeitos de propagação, desde o ponto onde ocorreu a reflexão até a superfície de observação, resultando assim no campo refletido no ponto A $p_{ref}(\vec{r}_A, t)$, conforme sugere a Figura (3.4).

Conforme visto no capítulo 2, para a aplicação da equação (3.6) é feita a suposição de que o ponto para o qual se deseja extrapolar o campo registrado na superfície, não esteja muito próximo do ponto gerador do campo de onda secundário, ou seja,

o ponto difrator deve estar distante do ponto onde estará a fonte do campo de onda de Green, (WAPENAAR E BERKHOUT,1989[3]). Entretanto, no caso do imageamento em subsuperfície esses pontos estão na mesma posição, resultando na introdução de imprecisões no valor do campo extrapolado, sendo necessário uma análise das consequências de tal fato nos resultados obtidos. Neste trabalho não se fez tal análise e se assumiu que através da equação (3.6) pode-se obter o campo $p_{ref}(\vec{r}_A, t)$ com boa aproximação.

Os dados de entrada para a etapa de migração em profundidade são o sismograma e o modelo de velocidades. A Figura (3.5) representa um esquema de migração sísmica onde se tem a extrapolação inversa do campo de onda a partir do sismograma, a extrapolação direta do campo de onda a partir da fonte, simulando os efeitos de propagação no modelo de velocidades e a aplicação de uma condição de imagem. Vale ressaltar que, na migração, a extrapolação do campo de onda, tanto direta como inversa, é feita para cada ponto do modelo de velocidades com a aplicação da condição de imagem.

3.1.3 Condição de Imagem

Uma condição de imagem muito utilizada em geofísica é a baseada no critério de amplitude máxima, equações (3.1) e (3.2), que baseia-se no tempo de chegada, em cada ponto do modelo, da máxima amplitude da frente de onda, ou seja, no tempo de chegada da onda direta $TD(i, j, k)$, (BOTELHO E STOFFA,1988 [18])

Como exemplo, a equação (3.2)

$$M_l(i, j, k, t) = \frac{p_{ref}(i, j, k, t = TD(i, j, k))}{p_{inc}(i, j, k, t = TD(i, j, k)) + \epsilon} \quad (3.7)$$

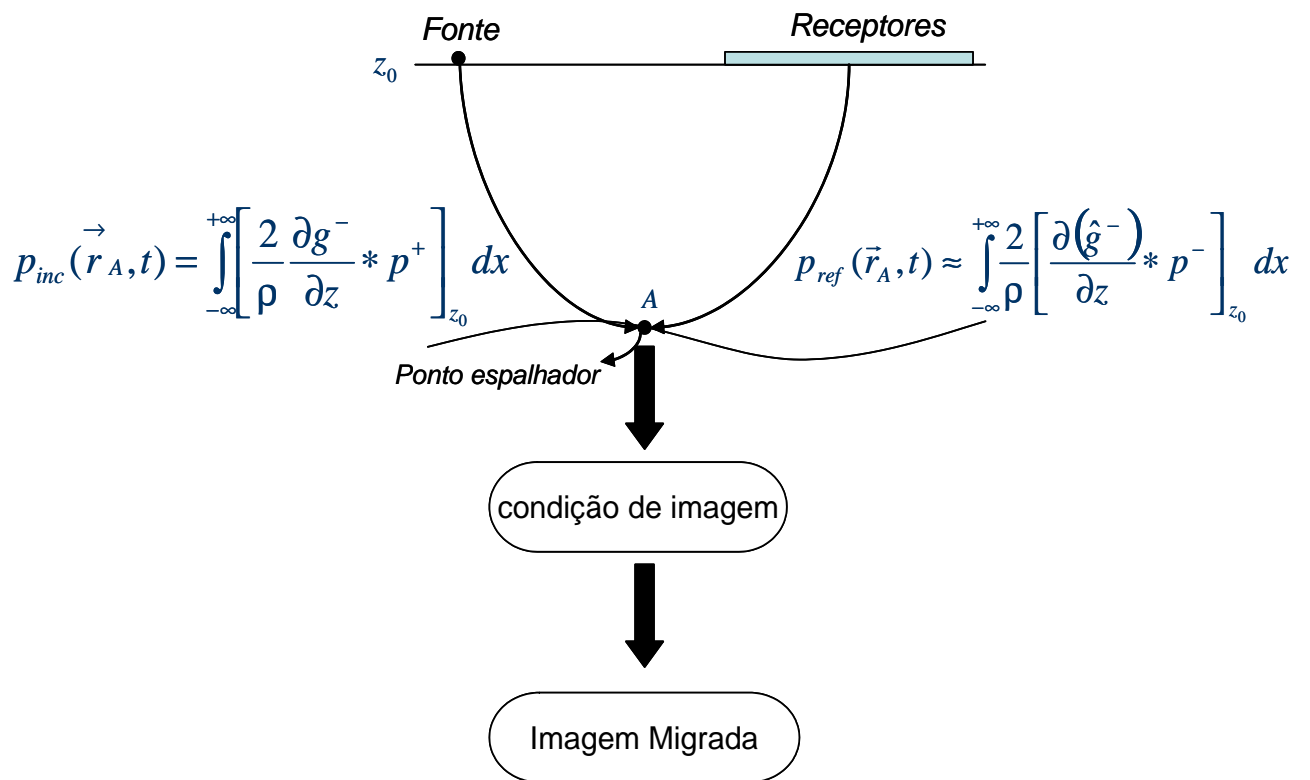


Figura 3.5: Esquema representando uma migração sísmica, onde se tem a extrapolação direta do campo de onda incidente, a extrapolação inversa do campo de onda registrado em conjunto com a condição de imagem e a imagem migrada.

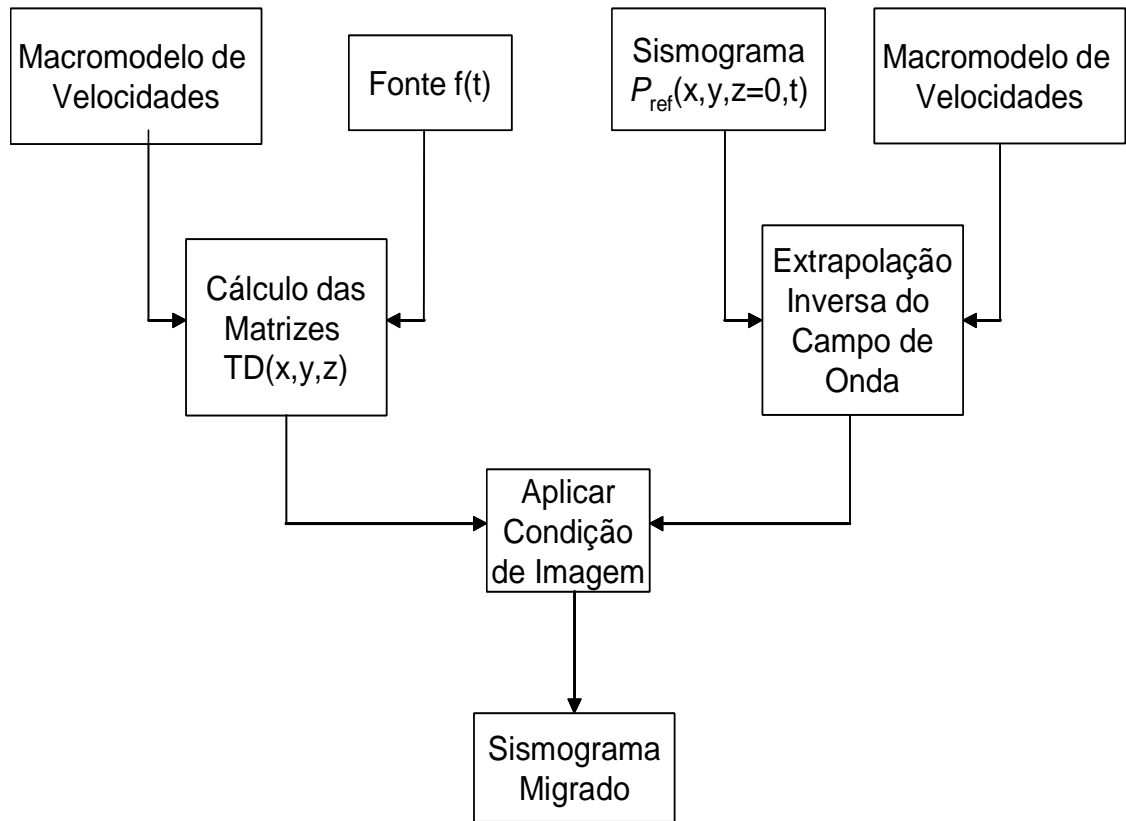


Figura 3.6: Fluxograma para migração sísmica (Adaptado de BOECHAT 2006 [15]).

baseia-se na coincidência entre o tempo de chegada da onda direta incidente $p_{inc}(i, j, k, t = TD(i, j, k))$ e o tempo de chegada do campo de onda refletido $p_{ref}(i, j, k, t = TD(i, j, k))$, extrapolado a partir do sismograma para o ponto onde ocorreu a reflexão, do tempo final para o tempo inicial. Conforme apresentado em (SILVA,2006 [16]) esses tempos coincidem no ponto onde foi gerada a reflexão, posicionando assim tais pontos. A condição de imagem possui um papel fundamental nos algoritmos de migração, influenciando de forma significativa a qualidade da imagem obtida (BULCÃO,2004[17]). Nas equações (3.1) e (3.2) é utilizada a condição de imagem baseada no tempo de chegada da onda direta, já nas equações (3.3) e (3.4) é usada a condição de imagem com correlação cruzada.

De acordo com o fluxograma da Figura (3.6) os dados de entrada para a etapa de migração em profundidade são o sismograma e o macromodelo de velocidades. A partir do macromodelo simulam-se os efeitos de propagação do campo de onda (extrapolação direta do campo de onda) para uma fonte na superfície e calcula-se o tempo de chegada da onda direta $TD(x, y, z)$ em todos os pontos do modelo. De posse do $TD(x, y, z)$ extrapola-se inversamente o campo de onda a partir do sismograma e impõe-se a condição de imagem. Vale ressaltar que o imageamento sísmico, (correto posicionamento dos refletores) depende da disponibilidade de um bom macromodelo de velocidades em função da obtenção do correto tempo de chegada da onda direta.

Capítulo 4

Conclusões, Comentários e Trabalhos

Futuros

Nesse trabalho foram analisadas métodos integrais para a extrapolação direta e inversa do campo de onda acústico registrado em uma superfície de observação. Essas extrapolações baseiam-se nas Integrais de Kirchhoff-Helmholtz que fornecem valores exatos para o campo de onda extrapolado. Entretanto, mostrou-se que a aplicação das Integrais de Kirchhoff-Helmholtz aos interesses do imageamento sísmico, requer uma série de considerações e aproximações que precisam ser bem compreendidas.

Como base para a extrapolação direta do campo de onda, utiliza-se a integral de Kirchhoff-Helmholtz (1.50) contendo o campo de onda de Green, ou seja, a resposta impulsiva do meio de uma fonte interior ao mesmo. Utilizando-se argumentos matemáticos e geométricos, mostrou-se que a parcela referente a integral de volume de tal equação pode ser descartada, assim como pode-se transformar a integral de superfície fechada em uma integral de superfície aberta, porém infinita. A utilização da equação (1.52) para a

extrapolação direta do campo de onda acústico fornece um resultado exato.

Ao se adotar condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann para a equação (1.52), obtêm-se as integrais de Rayleigh bidirecionais, que segundo (WAPE-NAAR E BERKHOUT,1989 [3]) são instáveis para pequenas diferenças entre o meio de propagação do campo de onda acústico e o meio de propagação do campo de onda de Green, tendo aplicabilidade quando o meio de propagação é muito bem conhecido ou quando não apresenta interfaces, mas sim zonas de transições suaves. Em alternativa a essa situação, utilizam-se as Integrais de Rayleigh unidirecionais (1.63) e (1.64), que ainda requerem um bom macromodelo de velocidades, porém são mais estáveis quanto a pequenas diferenças entre os meios de propagação dos campos de onda. A partir das integrais de Rayleigh unidirecionais e considerando que em uma aquisição sísmica os dados obtidos são discretos, obtêm-se operadores matriciais de extrapolação direta do campo de onda acústico. Com a aplicação de tais operadores se obtém uma aproximação para o campo de onda extrapolado, sendo necessário uma análise dos parâmetros de aquisição, a disponibilidade de um bom modelo de velocidades e do conhecimento do método utilizado para a reconstrução do campo de onda com boa aproximação

Tanto para a extrapolação direta como inversa, a obtenção de uma boa função de Green é fundamental para a eficácia do método, o que depende da disponibilidade de um bom modelo de velocidades (um modelo que se pareça, o máximo possível, com a conformação geológica em subsuperfície), entretanto na prática tem-se que trabalhar com a função de Green disponível, sendo importantíssimo o desenvolvimento de técnicas, cada vez melhores para a obtenção dessas funções a partir dos dados de campo.

Como base para a extrapolação inversa do campo de onda, utiliza-se a inte-

gral de Kirchhoff-Helmholtz (1.51), contendo o complexo conjugado da função de Green. Entretanto para a extrapolação inversa, a integral ao longo da superfície S_1 (Figura 2.2) não obedece à condição de radiação de Sommerfeld e a influência da integral sobre tal superfície tem que ser levada em consideração. Para o caso homogêneo mostrou-se que tal contribuição é zero, entretanto para o caso heterogêneo, essa contribuição tem que ser descartada causando uma imprecisão no campo de onda extrapolado utilizando-se apenas os dados registrados na superfície de observação S_0 . Ao se utilizar a equação (2.31) para a extrapolação inversa do campo de onda está negligenciando-se o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega) = \Delta P_2(\vec{r}_A, \omega)$, equação (2.25), o que segundo (WAPENAAR E BERKHOUT, 1989 [3]) pode ser feito apenas para meios cujos contrastes de impedâncias acústicas são baixos ou moderados¹.

A partir da equação (2.31) pode-se deduzir as integrais de Rayleigh para a extrapolação inversa do campo de onda que fornecem uma aproximação para o campo de onda ascendente no ponto A para uma superfície de aquisição plana e horizontal. As integrais de Rayleigh para extrapolação direta do campo de onda acústico, equações (1.63) e (1.64), fornecem o campo total exato no ponto A, $P(\vec{r}_A, \omega)$. Já as integrais de Rayleigh para extrapolação inversa do campo de onda acústico, equações (2.36) e (2.37) fornecem uma aproximação para o campo de onda ascendente no ponto A, $P^-(\vec{r}_A, \omega)$. Novamente, uma formulação matricial é adequada, em virtude dos dados em uma aquisição sísmica serem discretos.

A etapa de migração dos dados sísmicos, em profundidade, depende da extrapolação direta do campo de onda a partir da simulação de uma fonte na superfície

¹Meios adequados a modelagens usando traçamento de raios.

do macromodelo, da extrapolação inversa do campo de onda registrado na superfície (sismograma), associados a uma condição de imagem. Entretanto a teoria diz que para a utilização da equação (2.31) a fonte do campo de onda secundário e o ponto para onde se deseja extrapolar o campo não podem estar próximos um do outro, porém na migração em profundidade, apresentada no terceiro capítulo, tais pontos coincidem acarretando imprecisões no dados extrapolado.

Como sugestões para trabalhos futuros estão a implementação das técnicas de extrapolação direta e inversa, afim de se analisar a eficácia das mesmas, assim como de comparar os resultados obtidos através das soluções diferenciais da equação da onda. Também se faz bastante conveniente uma análise das consequências de se ter uma superfície de aquisição limitada e discreta, enquanto a teoria diz que deve-se ter uma superfície de aquisição fechada e contínua. Estimar o termo $\Delta P^-(\vec{r}_A, \omega)$ em função do macromodelo, implementação da migração Kirchhoff, estudo sobre o operador de refletividade, estudo do problema inverso, como por exemplo, a partir do coeficiente de reflexão, determinar as propriedades físicas que caracterizam o modelo de velocidades.

Referências

- [1] BERKHOUT, A.J., WAPENAAR, C.P.A., 1989, One-way version of the Kirchhoff integral: Geophysics, 54. 460-467.
- [2] WAPENAAR, C.P.A., PEELS, G.L., BUDEJICKY, V., BERKHOUT, A.J.,1989, Inverse extrapolation of primary seismic waves: Geophysics, 54. 853-863.
- [3] WAPENAAR, C.P.A., BERKHOUT, A.J.,1989, Elastic Wave Field Extrapolation, ELSEVIER.
- [4] BERKHOUT, A.J., 1982, Seismic Migration, 2nd ed, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- [5] SOARES FILHO, D.M., 2007, Extrapolação Direta do Campo de Onda Acústico, Apresentação Notas de Aula.
- [6] SOARES FILHO, D.M., 2007, Extrapolação Inversa do Campo de Onda Acústico, Apresentação Notas de Aula.
- [7] SCHNEIDER, W.A., 1978, Integral Formulation For migration in Two and Three Dimensions: Geophysics, 43, 49-76.

- [8] MORSE, P.M., FESHBACH, H., 1953, Methods of Theoretical Physics, MCGRAW-HILL, Part I.
- [9] BERKHOUT, A.J., 1985 Seismic migration: imaging of acoustic energy by wave field extrapolation. A. Theoretical aspects: Elsevier Science Publ. Co., Inc.
- [10] CLAYTON, R.W., STOLT, R.H., 1981, A Born-WKBJ inversion method for acoustic reflection data: Geophysics, 46, 1559-1567.
- [11] CASTLE, R.J., 1982, Wave-equation migration in the presence of lateral velocity variations: Geophysics, 47, 1001-1011.
- [12] CARTER, J.A., FRAZER, L.N., 1984, Accomodating lateral velocity changes in Kirchhoff migrations by means of Fermat's principle: Geophysics, 49, 46-53.
- [13] WIGGINS, J.W., 1984, Kirchhoff integral extrapolation and migration of non-planar data: Geophysics, 49, 1239-1248.
- [14] BERRYHILL, J.R., 1984 Wave equation datuming before stack: Geophysics, 49, 2064-2066.
- [15] BOECHAT, J.B.T., 2007, Migração Reversa no Tempo 3-D Orientada ao Alvo por Síntese de Frentes de Onda, Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.
- [16] SILVA, B.M., 2006, Migração RTM, PSPI e Split-Step de Registro de Múltiplas Fontes: Imageamento em Meios com Altos Contrastes de Velocidades, Dissertação de Mestrado, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.

- [17] BULCÃO, A., 2004, Modelagem e Migração Reversa no Tempo, Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.
- [18] BOTELHO, M. A. B., STOFFA, P. L., 1988, “Velocity analysis using reverse time migration”, Presented at the AGU annual meeting.
- [19] RAYLEIGH, J.W.S., 1965, The theory of sound, volume II, Dover Publications, Inc.
- [20] BUTKOV, E., 1988, Física Matemática, Editora Guanabara.

Apêndice A

Com objetivo de se obter a forma mais simples de reciprocidade entre dois campos, considere o Teorema da Reciprocidade de Rayleigh:

$$\oint_S \left[P^A \left(\frac{1}{\rho} \nabla P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho} \nabla P^A \right) \right] \cdot \vec{n} \, dS = [P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega)] S_o(\omega) \quad (1)$$

1) S é uma superfície rígida para os campos A e B (condição de contorno de Neumann).

Se a superfície é rígida, então a velocidade normal v_n das partículas através da mesma é zero

$$v_n(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{sobre } S. \quad (2)$$

Então:

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) = P^A(\vec{r}_B, \omega). \quad (3)$$

Considere a equação de movimento

$$\rho(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla p(\vec{r}, t) = 0, \quad (4)$$

passando para o domínio da frequência e fazendo o produto escalar com o vetor normal \hat{n} tem-se:

$$\rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, \omega) \cdot \hat{n} + \nabla P(\vec{r}, \omega) \cdot \hat{n} = 0, \quad (5)$$

assim

$$\rho(\vec{r}) v_n(\vec{r}, \omega) + \nabla P(\vec{r}, \omega) \cdot \hat{n} = 0, \quad (6)$$

como

$$v_n(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{sobre } S, \quad (7)$$

então

$$\nabla P(\vec{r}, \omega) \cdot \hat{n} = 0. \quad (8)$$

A partir das equações (8) e (1) pode-se concluir que:

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega) = 0. \quad (9)$$

2) S é uma superfície livre para os campos A e B (condição de contorno de Dirichlet).

$$P(\vec{r}, \omega) = 0 \quad \text{para } \vec{r} \in S. \quad (10)$$

A equação (10) se aplica para os dois campos A e B, então ao se considerar o Princípio da Reciprocidade de Rayleigh, equação (1) tem-se

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega) = 0. \quad (11)$$

3) V é um volume ilimitado para os campos A e B (Condição de Radiação de Sommerfeld).

Assumindo que o meio é homogêneo fora de uma esfera de raio infinito e que as ondas são localmente planas e se propagam paralelamente ao vetor normal à superfície que delimita o volume V (ilimitado), a Condição de Radiação de Sommerfeld é satisfeita em ambos os campos, ou seja:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial P(\vec{r}, \omega)}{\partial r} + ikP(\vec{r}, \omega) \right) = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(\vec{r}, \omega) = 0, \quad (13)$$

Onde

$$k = \omega / c = \omega / \sqrt{K / \rho}. \quad (14)$$

De fato

$$\oint_S \left[P^A \left(\frac{1}{\rho} \nabla P^B \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho} \nabla P^A \right) \right] \cdot \vec{n} \, dS = [P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega)] S_o(\omega), \quad (15)$$

então, para uma esfera tem-se

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega) = \frac{1}{S_o(\omega)} \oint_S \left[P^A \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^B}{\partial r} \right) - P^B \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^A}{\partial r} \right) \right] dS \quad (16)$$

com

$$P^A(\vec{r}, \omega) = f^A(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (17)$$

e

$$P^B(\vec{r}, \omega) = f^B(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (18)$$

Substituindo (17) e (18) em (16) tem-se

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega) \approx \frac{1}{S_o(\omega)} \oint_S \frac{f^A(\theta, \phi)}{\rho} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial P^B}{\partial r} \right) - P^B \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] dS \quad (19)$$

que em coordenadas polares fica:

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) - P^A(\vec{r}_B, \omega) \approx \frac{1}{S_o(\omega)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f^A(\theta, \phi)}{\rho} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial P^B}{\partial r} \right) - P^B \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (20)$$

$$= \frac{1}{S_o(\omega)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f^A(\theta, \phi)}{\rho} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{\partial P^B}{\partial r} \right) + ikP^B \frac{e^{-ikr}}{r} + P^B \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right] r^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (21)$$

$$= \frac{1}{S_o(\omega)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f^A(\theta, \phi)}{\rho} \left[r \left(\frac{\partial P^B}{\partial r} + ikP^B \right) + P^B \right] e^{-ikr} \sin\theta d\theta d\phi, \quad (22)$$

como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial P^B}{\partial r} + ikP^B \right) = f^B(\theta, \phi) r \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-ikr}}{r} + ik \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \quad (23)$$

$$= f^B(\theta, \phi) r \left(-ik \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r^2} + ik \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \quad (24)$$

$$= f^B(\theta, \phi) e^{-ikr} \left(-ik - \frac{1}{r} + ik \right) = 0 \quad (25)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P^B = \lim_{r \rightarrow \infty} f^B(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} = 0, \quad (26)$$

então

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) = P^A(\vec{r}_B, \omega). \quad (27)$$

Nas três situações acima, o teorema da reciprocidade é simplificado por

$$P^B(\vec{r}_A, \omega) = P^A(\vec{r}_B, \omega). \quad (28)$$

Apêndice B

Tomando por base a equação

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[(G^+)^* \left(\frac{\partial P^+}{\partial z} + \frac{\partial P^-}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial G^+}{\partial z} \right)^* (P^+ + P^-) \right]_{z_1} dx dy, \quad (1)$$

e aplicando o teorema de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x) G^*(k_x) dk_x, \quad (2)$$

onde $F(k_x)$ e $G(k_x)$ são as transformadas de Fourier de $f(x)$ e $g(x)$, pode-se escrever a equação (1) como:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[(\tilde{G}^+)^* \left(\frac{\partial \tilde{P}^+}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{P}^-}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{G}^+}{\partial z} \right)^* (\tilde{P}^+ + \tilde{P}^-) \right]_{z_1} dk_x dk_y, \quad (3)$$

onde

$$(\tilde{P}^-)^+ = (\tilde{P}^-)^+(k_x, k_y, z, \omega) \quad (4)$$

e

$$(\tilde{G}^-)^+ = (\tilde{G}^-)^+(k_x, k_y, z, \omega) \quad (5)$$

satisfazem a equação da onda unidirecional, respectivamente:

$$\left(\frac{\partial (\tilde{P}^-)^+}{\partial z} \right) = \mp i k_z (\tilde{P}^-)^+ \quad em \ z_1 \quad (6)$$

e

$$\left(\frac{\partial (\tilde{G}^-)^+}{\partial z} \right)^* = \pm i k_z^* \left((\tilde{G}^-)^+ \right)^* \quad em \ z_1 \quad (7)$$

onde

$$k_z(z_1) = \sqrt{k^2(z_1) - k_x^2 - k_y^2} \quad para \ k_x^2 + k_y^2 \leq k^2(z_1) \quad (8)$$

e

$$k_z(z_1) = -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2(z_1)} \quad \text{para } k_x^2 + k_y^2 > k^2(z_1) \quad (9)$$

com

$$k^2(z_1) = \frac{\omega^2 \rho(z_1)}{K(z_1)}. \quad (10)$$

A partir das equações (8) e (9) percebe-se que:

$$k_z^* = k_z \quad \text{para } k_x^2 + k_y^2 \leq k^2(z_1) \quad (11)$$

e

$$k_z^* = -k_z \quad \text{para } k_x^2 + k_y^2 > k^2(z_1). \quad (12)$$

Assim substituindo as equações (6) e (7) na equação (3) tem-se:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho} \left[(\tilde{G}^+)^* (-ik_z \tilde{P}^+ + ik_z \tilde{P}^-) - ik_z^* (\tilde{G}^+)^* (\tilde{P}^+ + \tilde{P}^-) \right] dk_x dk_y. \quad (13)$$

Escrevendo a equação (13) separadamente para a região de propagação do número de onda e para a região de ondas evanescentes, respectivamente:

$$k_x^2 + k_y^2 \leq k^2(z_1) \quad (14)$$

e

$$k_x^2 + k_y^2 > k^2(z_1), \quad (15)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta P(\vec{r}_A, \omega) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{k_x^2+k_y^2 \leq k^2(z_1)} \frac{-ik_z}{\rho} \left[(\tilde{G}^+)^* (\tilde{P}^+ - \tilde{P}^-) + (\tilde{G}^+)^* (\tilde{P}^+ + \tilde{P}^-) \right]_{z_1} dk_x dk_y \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{k_x^2+k_y^2 > k^2(z_1)} \frac{-ik_z}{\rho} \left[(\tilde{G}^+)^* (\tilde{P}^+ - \tilde{P}^-) - (\tilde{G}^+)^* (\tilde{P}^+ + \tilde{P}^-) \right]_{z_1} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (16)$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta P(\vec{r}_A, \omega) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{k_x^2+k_y^2 \leq k^2(z_1)} \frac{-ik_z}{\rho} \left[(2\tilde{G}^+)^* \tilde{P}^+ \right]_{z_1} dk_x dk_y \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{k_x^2+k_y^2 > k^2(z_1)} \frac{-ik_z}{\rho} \left[(2\tilde{G}^+)^* \tilde{P}^- \right]_{z_1} dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Segundo (WAPENAAR E BERKHOUT, 1989 [3]), nas equações (16) e (17), a integral sobre a região de ondas evanescentes é desprezível quando a fonte do campo de onda físico e a fonte do campo de onda de Green não estiverem, ambos, na vizinhança da superfície $z = z_1$. Assim para essa situação pode-se escrever que:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{k_x^2+k_y^2 \leq k^2(z_1)} \frac{-ik_z}{\rho} \left[(2\tilde{G}^+)^* \tilde{P}^+ \right]_{z_1} dk_x dk_y. \quad (18)$$

Aplicando a equação da onda unidirecional (7) a equação (18), tem-se que:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = -2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{G}^+}{\partial z} \right)^* \tilde{P}^+ \right]_{z_1} dk_x dk_y. \quad (19)$$

Aplicando o Teorema de Parseval (2) a equação (19) tem-se:

$$\Delta P(\vec{r}_A, \omega) = -2 \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial G^+}{\partial z} \right)^* P^+ \right]_{z_1} dx dy. \quad (20)$$